ノイマン展開法前処理によるＣＧ系アルゴリズム

7Ｌ－6

鈴木　信太郎　　石黒　美佐子
茨城大学工学部

1．はじめに

ＣＧ系アルゴリズムは並列、ベクトル処理に優れ、大規模線形方程式のスーパーコンピュータ向き解法として広く利用されている。しかしながら、その効率は、前処理をうまく並列計算できるかどうかにかかっている。本研究では、多様な係数行列に適用可能なノイマン展開法について並列処理の効果を検証する。差分法によるもの以外に、プラズマ流体方程式をフーリエ級数展開により離散化した行列にも適用する。

2．ノイマン展開法前処理[1]

ベクトル、並列処理による前処理計算手法として、従来より超平面(Hyperplane)法などが用いられてきたが、適用できる行列の形が限られる、計算順序の並び変えが必要などの欠点があった。ノイマン展開法は、超平面法では計算できないデータ参照関係にも適用でき、計算順序の並び変えの必要がない。

元の行列をブロック行列と仮定する。不完全LU分解し、対角要素による正規化後の単位下三角行列Ｌ（上三角行列U）を次のように区分する。

$$[L]_i = [I + E + F]_i \tag{1}$$

ここで、Eは対角の１段下（上）の要素、Fはその他の要素、iはブロックを示す。

これより、行列L(U)を係数行列とする方程式は次のように表せる。

$$[I + E + F]_i x = y_i$$
$$[I + E]_i x_i = y_i - [F]_i x_{i-1} \tag{2}$$

CG-like algorithms with Von Neumann Preconditioning.
Shintaro SUZUKI , Misako ISHIGURO
Faculty of Engineering , Ibaraki University.

ここで、x_i、y_iはベクトルである。

$[I+E]^{-1}$にノイマン級数展開を施せば次のようになる。

$$x_i = [I + E]_i^{-1}(y_i - [F]_i x_{i-1})$$
$$= [I - E + E^2 - E^3 + \cdots]_i (y_i - [F]_i x_{i-1}) \tag{3}$$

Eの要素の絶対値が１よりかなり小さいならば２次程度で展開を打ち切ることができ、Fの要素がゼロに近いものであれば省略できる。また、元の行列が優対角性の強いものであれば必ずしもブロック行列でなくてもよい。

この計算法では、演算に再帰演算は含まず、ブロックごとで独立に計算できるため、並列処理においてもプロセッサ間の同期の必要はない。

各前処理法による処理をFig.1に示す。( )内は反復回数を示す。ノイマン展開法では、展開を途中で打ち切るため超平面法に比べ反復回数が10％程度増加するが、処理速度は向上している。

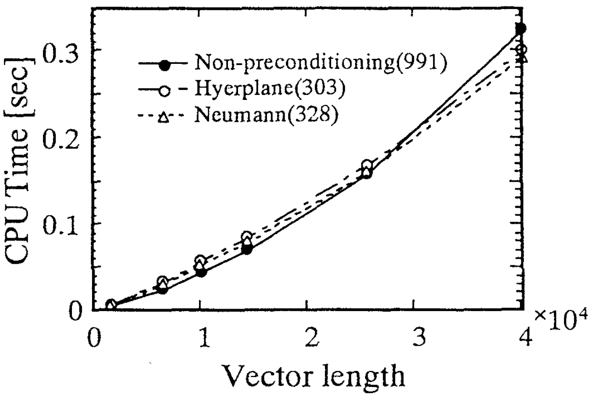

Fig.1 各種前処理法による処理比較

3．差分化方程式への適用

20台の要素プロセッサ(PE)を装備する並列計算機FAMEにおいて差分化方程式におけるノイマン展開法の効果を検証した。楕円型方程式の差分化式における並列化では、前処理行列をFig.2に示すように分割し、各PEに割り当てる[2]。割り

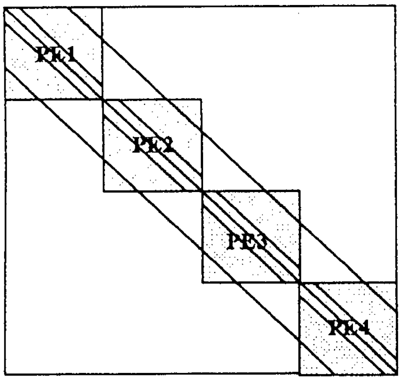

Fig.2　前処理行列の各PEへの割り当て

当てる部分以外の要素は無視して処理を行う 。

Fig.3にFAMEによる計算時間を示す。PE20台による処理で約10倍の高速化が達成されている。

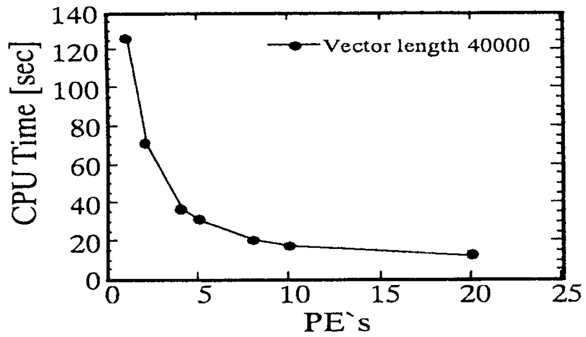

Fig.3 差分化方程式の並列処理

4．プラズマ流体方程式への適用

プラズマ流体方程式をトカマク形状（r－ζ－θ）で解くにあたり、角度はフーリエ変換で、小円半径 r は差分法で離散化される[3]。 r,ζ,θ方向の分割数をR,N,Mとすれば（N,M≪R）、Fig.4に示すN個の独立な行列が得られ、これらを係数

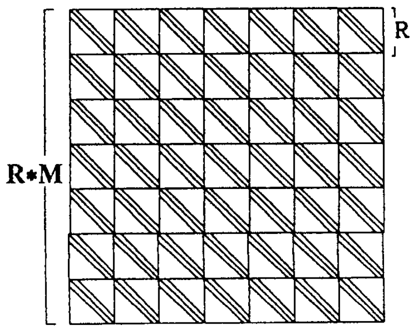

Fig.4　プラズマ流体方程式における離散化行列

とする線形方程式を解く問題に帰す。これを Bi-CGSTAB法[4]でノイマン展開法による前処理を用いて解く。フーリエ変換併用で得られる行列は、対角ブロック以外の要素が２桁程度小さな値をとるので、(3) 式においてＦの部分を無視して計算できる。これにより、データの依存性がなくなり前処理による並列性（ベクトル長）の減少を防ぐことができる。

Table 1 に M=20,R=300 の場合について反復回数と大型汎用機 M-880、スーパーコンピュータ S-3800による計算時間の比較を示す。正規化を行うだけで反復回数は1/3に、さらにノイマン展開法によって1/8に減少した。ベクトル化による計算速度向上は約40倍であった。

Table 1 ノイマン展開法による反復回数と計算時間

方法	反復回数	M-880 [sec]	S-3800 [sec]
前処理なし	1082	—	—
正規化のみ	299	31.4	0.506
ノイマン展開法	166	14.2	0.217

5．おわりに

前処理手法としてノイマン展開法を適用し、並列処理における有効性を確認した。

参考文献

[1] H.A.Van der Vorst,A Vectorizable Variant of Some ICCG Method,SIAM J.Sci.Stat.Comput. Vol.3, No.3, pp.856-869(1986).

[2] G.Radicatti di Brozolo,et al,Parallel Conjugate Gradient-like Algorithm for Solving Sparse Non-symmetric Linear Systems on a Vector Processor, Parallel Computing 11,pp.223-239(1989).

[3] 松下他,非線形MHD型プラズマシミュレーションの並列化,情報処理学会論文誌Vol.33, No.3, pp.360-368(1992).

[4] H.A.Van der Vorst,Bi-CGSTAB A Fast Lanczos-Type Solver for Nonsymmetric Linear Systems,SIAM J.Sci.Stat.Comput.Vol.13,No.2,pp.631-644(1992).