

GI/G/1 型全処理式多重待ち行列における退去間隔変動係数の近似解析

5K-6

阪本秀樹 鈴木偉元 西村一敏

NTT ヒューマンインタフェース研究所

1 はじめに

従来、計算機や通信システムの性能評価方法として、複数のGI/G/m型待ち行列の間をカスタマが確率的に遷移する、一般待ち行列網モデルの近似解法が提案されている^[1]。しかし、システムがトークンパッシングやポーリングを含む場合には、解析範囲を多重待ち行列を含む一般待ち行列網モデルにまで拡張する必要があり、そのためには、新たに多重待ち行列における平均待ち時間と退去分布が必要となる。平均待ち時間については文献^[2]に示されているため、本稿では、再生入力で一般サービス時間分布をもつ全処理式の多重待ち行列において、各待ち行列からの退去間隔の変動係数の近似式を導出する。

2 多重待ち行列モデル

図1に示すような、独立なN個の待ち行列が同一のサーバに接続された多重待ち行列を考え、以下の条件を設定する。

- (1) サーバは各待ち行列を巡回し、カスタマが待ち合わせている場合には、カスタマが空になるまで処理を行なう(全処理式モデル)。
- (2) 待ち行列 i ($i = 1, \dots, N$) へ到着するカスタマの到着間隔は、互いに独立であり、平均 γ_i^{-1} 、変動係数 c_{ai} の一般分布に従う。
- (3) 待ち行列 i ($i = 1, \dots, N$) に到着したカスタマへのサービス時間は、互いに独立であり、平均 s_i 、変動係数 c_{si} の一般分布に従う。
- (4) サーバが、待ち行列 i から待ち行列 $i \pmod{N} + 1$ へ移動する時間(歩行時間)は、互いに独立であり、平均 u_i 、変動係数 c_{ui} の一般分布に従う。
- (5) 各待ち行列 i における待ち室容量は無限とし、呼損は発生しないものとする。

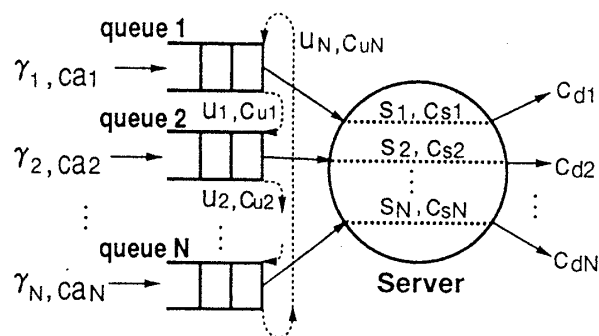


図1 多重待ち行列モデル

3 退去間隔の変動係数

上記のような多重待ち行列では、サーバがある待ち行列 i に対してサービスを行なっている期間は、他の待ち行列へのカスタマの到着とは無関係に、待ち行列 i が優先して中断のないサービスを受けることができる。しかし、待ち行列 i にサービスすべきカスタマがなくなり、一旦サーバが他の待ち行列のサービスや待ち行列間の歩行の期間に入ってしまうと、その後待ち行列 i へ到着したカスタマはサービスを待たされる。この、サーバの待ち行列 i へのサービス停止期間を部分巡回時間 I_i とおき、期間 I_i を仮想的な別のクラスのカスタマに対するサービス時間と考えると、多重待ち行列は、待ち行列 i へ到着したカスタマを優先クラス (high)、期間 I_i をサービス時間とする仮想的カスタマを非優先クラス (low)、とする、非割り込み優先制御 (Head-of-the-Line) 待ち行列モデルと考えることができる。さらに多重待ち行列では、待ち行列 i へのサービス時間と部分巡回時間 I_i は排他的であるので、使用率に関しては、非優先クラスにより優先クラスの空きが全て占有されている飽和状態 ($\rho_{low} \rightarrow (1 - \rho_{high})$) と考えることができる。

独立な2クラス入力のある非割り込み優先制御待ち行列 ($GI_{high}, GI_{low}/G_{high}, G_{low}/1$) において、優先クラスに対する退去間隔の変動係数 c_{d-high} については以下の近似式が示されている^[3]。

An Approximation Method of Interdeparture Time Variation for GI/G/1 Multiclass Queues with Exhaustive Services
Hideki Sakamoto, Hideharu Suzuki, and Kazutoshi Nishimura
NTT Human Interface Laboratories
3-9-11 Midori-Cho, Musashino-Shi, Tokyo 180 Japan

$$c_{d-high}^2 = 1 + (1 - \rho_{high}^2)(c_{a-high}^2 - 1) + \rho_{high}^2 \left\{ c_{s-high}^2 + \frac{\rho_{low} s_{low}}{\rho_{high} s_{high}} (1 + c_{s-low}^2) - 1 \right\} \quad (1)$$

多重待ち行列における待ち行列 i に対する退去間隔の変動係数は、式(1)の優先クラスに待ち行列 i のパラメータを、非優先クラスに部分巡回時間 I_i のパラメータを代入し、さらに使用率の関係を代入することにより、以下のようになる。

$$c_{di}^2 = 1 + (1 - \rho_i^2)(c_{ai}^2 - 1) + \rho_i^2 \left\{ c_{si}^2 + \frac{(1 - \rho_i)E(I_i)}{\rho_i h_i} (1 + c_{fi}^2) - 1 \right\} \quad (2)$$

ここで、 c_{fi} は定義より次のように与えられる。

$$c_{fi}^2 = \frac{E(I_i^2)}{\{E(I_i)\}^2} - 1 \quad (3)$$

部分巡回時間の1次モーメント $E(I_i)$ および2次モーメント $E(I_i^2)$ については、文献[2]で検討されており、以下のように与えられている。式(5)は近似式である。

$$E(I_i) = \frac{1 - \rho_i}{1 - \rho_o} c_o \quad (4)$$

$$E(I_i^2) = \frac{1}{(1 - \rho_o)} \sum_{j=1}^N (1 - \rho_i) s_j^2 c_{sj}^2 + \frac{1}{(1 - \rho_o)^2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \rho_j s_j c_{aj}^2 (1 + c_{sj}^2) u_k + E(I_i)^2 \quad (5)$$

ここで、 $\rho_o = \sum_{k=1}^N \rho_k$ 、 $c_o = \sum_{k=1}^N u_k$ である。

4 評価結果

対称トラヒック (γ_i, s_i, u_i および c_{ai}, c_{si}, c_{ui} が全ての i について同一の値) を想定し、式(2)より求めた待ち行列 i の退去間隔の変動係数 c_{di} と、文献[2]で示されている平均待ち時間 $E(W_i)$ とを図2に示す。多重待ち行列に接続された待ち行列の数 N は2、サーバの平均歩行時間 u_i は平均サービス時間 s_i の20%とした。いずれの場合も、シミュレーション結果に対して誤差15%以内で一致していることがわかる。

通常の待ち行列においては、その退去間隔の変動係数は、到着間隔またはサービス時間の変動係数を越えることはない^[1]。それに対して多重待ち行列では、サーバ使用率の上昇に伴い各待ち行列でのサービスがバースト的となるため、その退去間隔変動係数は到着間隔またはサービス時間の変動係数を越え、その何倍もの値になることが特徴である。

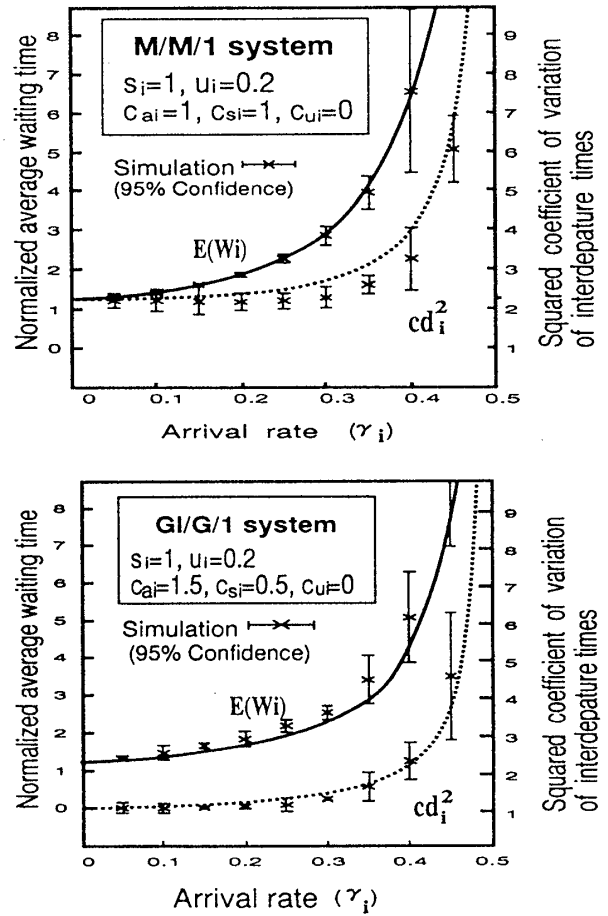


図2 多重待ち行列における平均待ち時間と退去間隔変動係数

5 おわりに

本稿では、再生入力で一般サービス時間分布をもつ全処理式の多重待ち行列において、各待ち行列からの退去間隔の変動係数を算出する方法を示した。対称トラヒックを想定した数値例を用い、本算出法はシミュレーションと良く一致していることを示した。本算出法と文献[2]で示されている平均待ち時間とを、一般待ち行列網モデルの近似解析法に組入れることにより、多重待ち行列を含む一般待ち行列網モデルの近似解析が可能となる。

参考文献

- [1] W. Whitt: "The Queueing Network Analyzer", Bell Syst. Tech. J., 62, pp. 2779-2815 (1983).
- [2] 木村丈治, 高橋敬隆: "全処理式およびゲート式トークンリングシステムのトラヒック解析—再生集団入力の場合—", 信学論(B), J71-B, 2, pp. 129-137 (1988).
- [3] H. Yoshino: "An Approximation Method for Queueing Network with Nonpreemptive Priority and Its Performance", Trans. IEICE, E73, 3, pp. 386-394 (1990).