無閉路有向グラフにおける系列分割問題の算法構成

3Ｔ－３

加地太一　　大内　東
北海道情報大学　北海道大学

1．はじめに

前回、無閉路有向グラフの系列分割についての問題の構成、定義およびその算法の概略について述べた[3]．今回はその考えにもとずく算法の詳細な構成について述べる．とくに切断決定子の生成に関与する基本操作とその性質について考察する．

2．問題と諸定義

無閉路有向グラフG（V，E）は以下の関係

1）x＜yかつy＜zならば、x＜z（推移律）

2）x＜yならばy≮x（非対称律）

3）x≮x（非反射律）

を示すグラフである．無閉路有向グラフの系列分割とは、このグラフに対して、次の２つの制約のもとで、k個の部分グラフG_i（V_i，E_i）：i＝１、２、・・・、kで切断される辺のコストの総和が最小になるよう分割する問題である．

1）G_iの頂点の重みの総和　≦　ブロックサイズ

2）Gの先行順位が任意のG_iにおいても保持される．

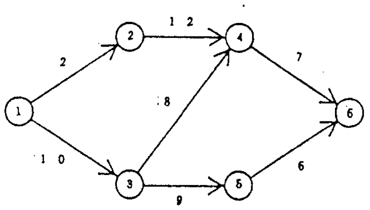

図1　無閉路有向グラフ

グラフGを相互排他的かつ網羅的な２つの部分グラフB、Γに分け、Bの任意の頂点bとΓの任意の頂点cに対して、それらが比較可能ならば、必ずb＜cが成立するとき、BをGの下組、ΓをGの上組という．そして順序対（B、Γ）を切断という．グラフGに対して、下組B、上組Γによる切断（B、Γ）が与えられたとき、グラフGにおいて、上組Γの点x∈Γはそのすべての直接の先行点（xに流入する辺の始点）がΓ自身に属するものをΓの内点、そうでないものをΓの境界点という．境界点の集合Pは分割（B、Γ）を一意に決定するので、これをGの切断決定子という．

さらにグラフGに対して複数の切断を試みた場合の全ての切断決定子から成る集合をΩとする．ここでP_1，P_2∈Ωとし、それぞれ対応する下組グラフをB_1、B_2とするとき、$B_1 \subset B_2$が成立するならば、P_2はP_1より優位であるといい、それを$P_1 \ll P_2$で表す．$B_2 - B_1$によって誘導されるGの部分グラフをブロックといい、〔P_1、P_2〕で表す．また切断決定子の単調増加列$P_1 \ll P_2 \ll \cdots \ll P_n$のことを切断決定子の鎖といい、これによって無閉路有向グラフの一意な分割が表現できる．前回の考察より、全ての切断決定子を効果的に生成し、その半順序性より漸化的に解を求めうる．

3．切断決定子の生成

切断決定子Pが与えられたとき、それによって定まる下組Bの要素数をPのレベルという．切断決定子Pに対してレベル数が１だけ大きい切断決定子P^{*}を導く処理を切断決定子の生成の基本操作と呼ぶ．この際、基本操作の非決定性により導かれる切断決定子の個数は不特定多数である．

切断（B、Γ）と対応する切断決定子Pに対して、基本操作は次の操作を行う．Pの中からΓにおいて入り次数が０の点vを選び出す．vから流出辺の終点の集合を求め、これをWとすると

（1）$B^{*} = B \cup \{v\}$；

（2）$\Gamma^{*} = \Gamma - \{v\}$；

（3）$P^{*} = (P - \{v\}) \cup W$
　　　$= (P - \{v\}) \cup (W - P)$；

（B^{*}、Γ^{*}）は新しい下組、上組を決める．すなわち切断となる．このとき、P^{*}がこの切断の切断決定子になる．以下に基本操作の正当性を示す．

定理

基本操作により決定されたGの部分グラフをB^{*}、Γ^{*}とすると、（B^{*}、Γ^{*}）は切断であり、かつP^{*}は対応する切断決定子である．

証明

$\Gamma^{*} = P^{*} \cup (\Gamma - \{v\} - P^{*}) = P^{*} \cup R$

と置いたとき、P^{*}はすべて境界点から、　また$R = \Gamma - \{v\} -$

An Algorithm of Sequential Partitions of Acyclic Graphs
Taichi Kaji, Azuma Ohuchi
Hokkaido Information University, Hokkaido University

P^{-}はすべて内点からなることを示せばよい．

P^{-}に含まれる点はvを除いたPの点および$W-P$の点からなる．すなわち

$P^{-}=(P-\{v\})\cup(W-P)$

そこでwをP^{-}に含まれる任意の点とすると、$w\in P-\{v\}$か、または$w\in W-P$の何れかである．

case 1：$w\in P-\{v\}$のとき、$w\in P$であるからΓの境界点であり、Gの中でΓに属さない先行点uが存在する．$v\in\Gamma$であるから、$u\neq v$であり、よってwは$\Gamma^{-}=\Gamma-\{v\}$に属さない先行点uを含むので、Γ^{-}の境界点である．

case 2：$w\in W-P$の場合、wはvからの流出辺の終点であるから、vはwの先行点である．$v\notin\Gamma^{-}$よりwはΓ^{-}の境界点である．

以上より、P^{-}はΓ^{-}の境界点のみからなることが判明する．次に、

$$R=\Gamma-\{v\}-P^{-}=\Gamma^{-}-P^{-} \qquad (3.1)$$

が内点のみを含むことを示す．まず以下の関係

$$\Gamma-\{v\}-P^{-}\subset\Gamma-P \qquad (3.2)$$

が成立することがわかる．Rに含まれるあるwがΓ^{-}の境界点であると仮定すると、Γ^{-}には含まれないwの先行点uが存在する．ここでuはvと一致する事はない．もし$u=v$ならば$w\subset W$でなければならず、$w\in P^{-}$が導かれるがこれはwをRから取ったことに矛盾するからである．

不等式（3．2）よりwは$\Gamma-P$の点でもありwが内点であることを示している．しかし$u\neq v$とすればuはΓに含まれない点でもあり、これは矛盾する．

□

切断決定子Pに対して基本操作を行うことによって導かれた切断決定子P^{-}をすでに得られている同レベルの切断決定と比較し、新しいものが得られているときに、これを新規登録することによって同レベル要素のすべてからなる集合を求めることが可能である．ある切断決定子Pから出発して、それから派生される全ての切断決定子を決定するには、レベル順に横型に求めていけばよい．この操作の算法を以下に示す．

```
初期切断決定子をオープンリストに格納する;
While(オープンリストが空でない) begin
    オープンリストの先頭要素の切断決定子を取りtnとする;
    while(切断決定子のすべての要素に対して入り次数が0で
                                あるものをiとする) begin
        切断決定子tnと要素iに対して基本操作により新たな切断
                                        決定子gnを生成する;
        if (gnがすでに生成されていない) begin
            gnをオープンリストの後方に加える;
            gnからtnへのポインターを確保する;
        end
    end
end;
```

以上の算法により全ての切断決定子が生成され、それらの関係において半順序関係が成立する．また横型探索法による展開により、最終的に切断決定子の半順序関係は一列化されたものとして求まる．図1の無閉路有向グラフに対して上記の算法により図2の全ての切断決定子とその一列化された関係が求まる．

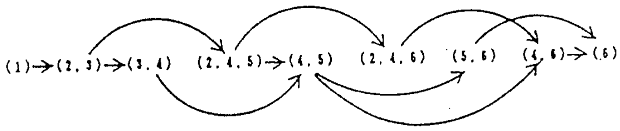

図2　一列化された切断決定子

この一列化された切断決定子の各状態を動的計画法により、順次最良部分解を確定していく．上記の一列化された切断決定子の順番に対して各切断決定子に認識番号を与えるものとする．ここで切断決定子P_1に対してP_2が置かれたときの増分コストをI（P_1の認識番号，P_2の認識番号）とする．また最小部分解コストをM（x）とする．以下の手順で部分解が確定し、M（切断決定子数＋1）が求まった段階で本問題の最適解が求まる．

```
M(0) = 0;
for x=1 to 切断決定子数＋1
    M(x) = min{M(y)+I(x,y)};
```

このとき、yはブロックサイズ分の範囲で制約される．

4．おわりに

本論分では無閉路有向グラフの系列分割問題に対して算法の構成を行い、特に切断決定子の生成について詳細な検討を行った．また算法の構築においては切断決定子の生成など複雑なオブジェクトに対処するためC＋＋を用いた．さらに算法の評価および性能について考察したい．

参考文献

1)Brian.W.Kernighan: Optimal Sequential Partitions of Graph, J.ACM,Vol.18,No.1,pp.34-40(1971).

2)加地、大内：分枝限定法による系列分割問題の算法構成と効率、情報処理学会研究報告、92-AL-28,pp25-32(1992).

3)加地、大内：一列化と半順序なグラフの分割、情報処理学会第46回全国大会講演論文集（1）、pp.75-76.