

2変数代数曲線の忠実な描画

齋藤友克^{†1} 近藤祐史^{†2}
三好善彦^{†3} 竹島卓^{†4}

本論文では、2変数の有理係数多項式によって定義される平面代数曲線を忠実に描画する新しいアルゴリズムを提案する。代数的観点から見ると、従来は描画された図形の正しさについての妥当な基準自体が明示されていないが、基準がある場合でも数値計算に基づくアルゴリズムは数学的な意味では不完全であった。本論文では、「描画の忠実さ」と呼ぶ正しさの基準を設け、その基準を満たす合理的なアルゴリズムを提示する。合理的なアルゴリズムは正確な数、すなわち有理数をベースにして有理演算（加減乗除）のみにより誤差をとまわず実行されるので結果は本質的に正しく、誤差に起因する結果の正しさの保証は不要である。提案されたアルゴリズムによって描画された図形は、表示装置の解像度、あるいは表示すべき解像度の範囲で正しいことが保証される。本論文で提案する描画基準と描画方法が有効であり、かつ実用的であることは多くの実行例を通して示されている。なお、本アルゴリズムは数式処理システム Risa/Asir の外部関数として実現している。

Faithful Plotting of Real Curves Defined by Bivariate Rational Polynomials

TOMOKATSU SAITO,^{†1} YUJI KONDOH,^{†2} YOSHIHIKO MIYOSHI^{†3}
and TAKU TAKESHIMA^{†4}

A new algorithm to faithfully plot planar curves defined by bivariate rational polynomials is presented. From algebraic point of view, valid criteria of “correctness” of drawn figures were usually unclear in many preceding works, or even if they were, algorithms based on numerical computation were incomplete in a strict mathematical sense. This paper defines “faithfulness” as a criterion for the drawn curves and presents a rational algorithm that satisfies the criterion. Rational algorithms are performed on rational arithmetic over exact numbers, i.e., rational numbers. Consequently, there is no need of error estimation of the results—they are intrinsically correct and exact. The presented algorithm guarantees the correctness of the drawn figure up to the resolution of the displaying apparatus or up to the required resolution. Many practical experiments show the validity and practicality of the proposed criterion and algorithm. The algorithm is implemented as an external function of Risa/Asir, a computer algebra system.

1. 序 言

任意の数学的に定義された2変数方程式 $f(x, y) = 0$ の解を画面もしくは紙面の上に描画することを主テーマとする。特に、 $f(x, y)$ が多項式の場合は、 y は x の代数関数（一般に多価関数）であり、このような代数関数の零点を描画する問題は、通常は容易な問題と

考えられている。真の解は幅のない連続な曲線である。しかし、実際には描画する装置に依存する解像度の制限内での小さくとも有限の領域を持つ“点”の集合として、幅のある“曲線”として描かれる。このことを考えるならば、描かれた図形がどの程度正確かという問に対して数学的に厳密な解答を付けることは困難であった。この問題に関して、Fateman²⁾による正しい図形の描画に関する論文がある。また、位相的に正しい図を描画するアルゴリズムの構成は谷口らによる文献10)が存在する。また、基礎的な概念は文献7), 9)により与えられている。

従来、2変数関数の零点を描画するためには次のようにしていた。零点のいくつかを数値的に求める。その点を含む分枝をなんらかの手段で追跡する。あるいは

†1 上智大学理工学部
Department of Mathematics, Sophia University

†2 詫間電波工業専門学校
Takuma National College of Technology

†3 埼玉女子短期大学
Saitama Women's Junior College

†4 富士通研究所
Fujitsu Laboratories Limited

は補間して表示する．従来の数値的計算に基づく方法は，特異点以外では数値的近似が可能であるとはいえものの，明示的にどの程度の近似であることを示すためには，個々の関数ごとに吟味が必要であった．これに対し，本論文で提案する Faithful plot は，与えられた図の忠実さという概念が明確である．さらにこの概念に基づくアルゴリズムが実行可能であることを示す．

本論文で提案する手続きの特徴としては，次の 2 点を上げることができる．第 1 は，計算を有理的計算に限定することにより正しい結果を与えるアルゴリズムを構成している．従来の手法で提案されているアルゴリズムに比べ，結果の正しさの保証に明らかに有利である．第 2 には，表示された図形の正しさの検証が被表示関数によらず不必要であることである．

計算を有理的計算に限定したことが意味を持つためには，多項式の係数は有理数を含む最小の代数的閉体の元に限るという制限を持つことになる．さらに，計算量を考慮するならば，代数的数を避け有理数係数の多項式のみを扱うことが妥当である．この制約は，実際に従来から取り扱われてきた事例を完全に含むといっても過言でなく，この制約は実用上の一般性を失うものではない．

2. 準備

アルゴリズムを構成するにあたって必要な概念を導入する．また，利用する数学的な用語ならびに定義，定理を示す．

2.1 Cell の概念

本アルゴリズムにおける描画の最小単位として Cell と呼ばれる集合を定義する．

定義 1 (Cell の定義) 描画空間 D を Cell C_k と呼ばれる閉集合に完全分割する．

- (1) $D = \bigcup_{k=1}^m C_k$, $C_k^i \cap C_j^i = \phi$, $k \neq j$,
 - (2) C_k は連結,
 - (3) 各 C_k の Jordan 測度はゼロではない,
- とする．ここで C_k^i は, C_k の内点の全体とする．

この Cell の例としては，描画空間を埋めつくす矩形タイルがある．一般に Cell の境界は区分的に代数関数により定義できるものであれば，本論文で提案するアルゴリズムの骨子が適用できる．しかし，実用的には境界は直線であるほうが計算上有利である．よって Cell としては境界を含む矩形とする．我々は，Cell の大きさを「描画の精度」あるいは「解像度」と呼ぶ．

アルゴリズムの計算量をさらに軽減するため，分割の境界は単に代数的数とはせず有理数とする．その理

由は，計算量的に不利な代数的数の計算を避けるためである．以上の条件により，一般性を失うことなく描画空間の領域 D を次のようにすることができる．

$$D = \{(x, y) | a_1 \leq x \leq a_{m+1}, b_1 \leq y \leq b_{n+1}\}.$$

とし，各 Cell $C_{i,j}$ を

$$C_{i,j} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | a_i \leq x \leq a_{i+1}, \\ i = 1, \dots, m, \\ b_j \leq y \leq b_{j+1}, j = 1, \dots, n\}.$$

とする．

2.2 忠実な描画 (Faithful plot) の定義

本論文の基本的立場は，『「関数を描画する」とは「 $C_{i,j}$ と関数の零点集合が共通部分を持つ」ことを判別することである』とするものである．

定義 2 (Faithful plot) 描画が忠実であるとは，描画される $C_{i,j}$ は解曲線と共通部分を必ず持ち，描画されない $C_{i,j}$ は解曲線と共通部分を持たないことである．

ここで「描画する」(plot) とは，表示装置の該当する画素を「塗る」ことである (紙に印刷する場合も印刷インクを解像度に応じて「塗る」こととする) ．この描画基準による描画を実行するには，代数方程式の解が与えられた領域内に存在するかどうかの構成的判定が必要である．一般の (超越的な元，自然対数の底 e や三角関数などを含む) 2 変数方程式に対するこの要請を満足する理論およびアルゴリズムは知られていない．1 変数代数方程式の場合は Sturm の定理を適用すれば判定できる．また，多変数代数方程式の場合の数学的な理論は Pedersen らの研究⁵⁾ がある．一方，2 変数の代数方程式に特化した場合は文献 6), 8) の結果があり，本論文では多数の領域での解の存在判定に適した文献 6), 8) の方法を示す．

2.3 数学的準備

本論文で扱う体 K は，特に断らない限り有理数体 \mathbf{Q} とする．また K 上の多項式環 (K を係数体とするすべての多項式の作る環) を $K[x_1, \dots, x_n]$ とする．

2.3.1 無平方多項式

定義 3 (無平方多項式) 多項式が重根を持たないときその多項式を無平方多項式という．

多項式を割り切る最大次数の無平方多項式をその多項式の無平方部分と呼ぶ．

2.3.2 Sturm の定理

Sturm の定理³⁾ によれば，1 変数多項式の実根の存在が厳密に判定できる．

定義 4 (多項式の Sturm 列) $f(x)$ を実係数無平方多項式とする．したがって， $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ は自明な共通因子 (係数体の元，特に 1) 以外を持た

ない。

次の漸化式で定まる多項式の列 $\{f_i(x)\}_{i=0,\dots,r}$ を多項式の Sturm 列と呼ぶ。

$$\begin{aligned} f_0(x) &= f(x), \\ f_1(x) &= f'(x), \\ f_{i-2}(x) &= q_{i-1}(x)f_{i-1}(x) - f_i(x) \\ &\quad \deg(f_i(x)) < \deg(f_{i-1}(x)), \\ &\quad q_i \in \mathbf{R}[x], \\ &\quad \text{for } i = 2, 3, \dots, r-1, \\ f_r(x) &= 0. \end{aligned}$$

ここで、 $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である。

定理 5 (Sturm の定理) $a < b$ で a が $f(x)$ の根でないならば、半開区間 $(a, b]$ にある $f(x)$ の実根の個数は $V(a) - V(b)$ に等しい。

ただし、 $V(a)$ は多項式の Sturm 列の変数に数値 a を代入した Sturm 列 $f_0(a), f_1(a), f_2(a), \dots, f_r(a)$ の符号変化の回数とする。

2.3.3 イデアル

零点集合と密接な関連がある環のイデアルの概念は重要である。Hilbert の零点定理によりイデアルの根基と零点集合とは 1 対 1 に対応している。よって、イデアルの零点集合を求めることは適切なイデアル基底を求めることに対応している。

定義 6 (イデアル) K を係数体とする多項式環 $R = K[x_1, \dots, x_n]$ の部分集合 I が R の多項式イデアル (以下イデアルと呼ぶ) であるとは、

- 任意の I の元 a, b に対し $a + b \in I$
- I の任意の元 a と多項式環 R の任意の元 b に対し $ab \in I$

が成り立つことである。

イデアルに対し、ある有限個の I の元 f_1, \dots, f_m が存在し、すべてのイデアルの元は、 $a_1 f_1 + \dots + a_m f_m$ と表すことができる。ここで a_i は多項式環 R の元である。この f_1, \dots, f_m をイデアル I の生成元、あるいは基底と呼び、 $I = \text{ideal}(f_1, \dots, f_m)$ と表す。

定義 7 (イデアルの零点集合) イデアル I を構成するすべての多項式の共通零点をイデアルの零点と呼ぶ。イデアルのすべての零点から成る集合を $\text{Zero}(I)$ と表す。

定義 8 (零次元イデアル) イデアルの零点の個数が有限個であるときこのイデアルを零次元イデアルと呼ぶ。

命題 9 $\text{ideal}(f_1, \dots, f_m)$ の零点集合は f_1, \dots, f_m の共通零点である。また、その逆も成り立つ。

このことから、連立方程式の根は方程式を構成する多項式の生成するイデアルの零点であり、同じイデアルを生成する生成元の共通零点に一致することが分か

る。したがって、方程式を解くとは、同じイデアルを生成し、ある意味で簡単な生成元の集合を求めることと解釈できる。

2.3.4 項の順序

本論文で提案する描画方法では、1 つの Cell に埋没するコンポーネントの存在を判定するために、2.3.8 項で定義する特殊点の座標の満たす最小多項式 (あるいはその因子) を用いるが、その最小多項式を求める方法として、2.3.6 項で述べる多項式イデアルの Gröbner 基底¹⁾ を用いる。Gröbner 基底を定義するには、多項式を構成する単項式 (係数を除いた項) について次の条件を満たす全順序が用いられる。

定義 10 (項順序) 多項式環 $K[x_1, \dots, x_n]$ のすべての単項式 $x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n}$ のあいだの順序 \prec が次の条件を満たすとき、これを項順序という。

- すべての単項式のあいだに順序が入る (全順序)
- 単項式 a, b, c に対し $a \prec b$ ならば $ac \prec bc$

本描画アルゴリズムでは、次に定義する全次数逆辞書式順序を利用する。

変数の間の順序を

$$x_1 \succ x_2 \succ \dots \succ x_n$$

とし、 $T = x_1^{e_1} \dots x_n^{e_n}$ と $T' = x_1^{e'_1} \dots x_n^{e'_n}$ とする。

このとき、全次数逆辞書式順序は次のとおりである。

- $\sum_{i=1}^n e_i < \sum_{i=1}^n e'_i$ ならば $T \prec T'$ 。
- $\sum_{i=1}^n e_i = \sum_{i=1}^n e'_i$ ならばある i ($i+1 \leq j \leq n$) が存在し $e_j = e'_j$ かつ $e_i < e'_i$ のとき $T \prec T'$ 。

2.3.5 M-簡約

項順序が定義されると、その順序を使って多変数の場合のある種の割算にあたる M-簡約が定義できる。多項式 g の多項式 f による 1 回の M-簡約とは次の処理を行うことである。

- H を f の最高順序の単項式とする。
 $f = cH + (\text{残りの項}) \quad c \in K$
- g のある単項式 T が $T = T'H$ と表せるとする。
 $g = c'T + (\text{残りの項}) \quad c' \in K$
- $g - (c'/c)T'f$ を求める。

これにより g の項 T は消去される。

さらに多項式 g の多項式集合 $\{f_1, \dots, f_m\}$ に関しての 1 回の M-簡約とは、 g に対しある f_i を使って 1 回の M-簡約を行うことである。

多項式 g を $\{f_1, \dots, f_m\}$ により繰り返し M-簡約すると必ず有限回の操作によりこれ以上簡約できない多項式 \underline{g} が得られる。このとき \underline{g} は、 $\{f_1, \dots, f_m\}$ により正規形 \underline{g} に簡約されるという。この定義による

正規形は一意でない。しかし簡約に使う多項式集合が次に述べる Gröbner 基底の場合に限り一意に定まる。

2.3.6 Gröbner 基底

イデアルを取り扱ううえで都合のよい性質を持った基底が Gröbner 基底である。

定義 11 $\Gamma = \{g_1, \dots, g_m\} \in \mathcal{I}$ がイデアル \mathcal{I} の Gröbner 基底であるとは、

- イデアル \mathcal{I} は Γ により生成される。
- イデアル \mathcal{I} のすべての元は、 Γ により 0 に簡約される。
- Γ の任意の元は他の Γ の元により簡約されない。

2.3.7 最小多項式

イデアルの次元が零次元であると仮定する。次のような最小多項式と呼ばれる多項式が構成できる。

定義 12 (最小多項式) $\mathcal{I} \subset R = K[x_1, \dots, x_n]$ は零次元イデアルであるとする。 $f \in R$ の \mathcal{I} に関する最小多項式 $\psi \in K[t]$ とは多項式であって、次の性質を持つ。

- (1) ψ はモニック。
- (2) $\psi(f) \in \mathcal{I}$ 。
- (3) モニックで $\psi'(f) \in \mathcal{I}$ を満たす任意の $\psi' \in K[t]$ に対して、 $\deg(\psi) \leq \deg(\psi')$ 。

ある項順序での Gröbner 基底が求まっているとする。このとき線形計算によって、容易に最小多項式が求められる¹¹⁾。特に、 $f = x_i$ の場合には、 $\psi(x_i) \in \mathcal{I}$ となり、 $\psi(x_i)$ 自身がイデアル \mathcal{I} の元である。このことから、 f_1, \dots, f_m の共通零点の x_i -座標が満たすべき一変数方程式は x_i の最小多項式として得られる。

2.3.8 特殊点

本論文において、 $f(x, y)$ の零点を描画するために手掛かりとする曲線上の点 (x, y) は次のものである。

- (1) 特異点 $f(x, y) = 0$, $\partial f(x, y)/\partial x = 0$ かつ $\partial f(x, y)/\partial y = 0$
- (2) x -特異点 $f(x, y) = 0$ かつ $\partial f(x, y)/\partial x = 0$
- (3) y -特異点 $f(x, y) = 0$ かつ $\partial f(x, y)/\partial y = 0$

本論文においては、特異点、 x -特異点、 y -特異点を特殊点と呼ぶ。

2.3.9 平面を直線に写す写像による正方形領域の直線上の像

平面上に正方形 $S_{i,j}$ $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ が以下のように配置されているとする。

$$S_{i,j} = \{(x, y) | a_i \leq x \leq a_i + w, \quad b_j \leq y \leq b_j + w\} \quad (1)$$

¹¹⁾ 多項式がモニックであるとは、最高次数の係数が 1 であることである。

$$0 < a_1, a_2, \dots, a_m \quad (a_i + w < a_{i+1})$$

$$0 < b_1, b_2, \dots, b_n \quad (b_j + w < b_{j+1})$$

a_i, a_{i+1} の最小距離を E とする。同様に b_j, b_{j+1} の最小距離を M とする。

平面上の点 $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ を直線上の点 $w \in \mathbf{R}$ に写す線形写像 $\phi(x, y)$ を考える。この写像によってすべての $S_{i,j}$ の像が交差しないための条件を求める。

この線形写像は特異点の存在する Cell を判定するために利用される。

定理 13 上記の仮定の下で、 $S_{i,j}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ の線形写像 $\phi = y + \alpha x$ による像は、

$$\frac{w}{E-w} < \alpha < \frac{M-w}{a_m - a_1 + w} \quad (2)$$

であれば交差しない。

証明

各 $S_{i,j}$ の ϕ による像は、

$$\alpha a_i + b_j < \phi(S_{i,j}) < \alpha a_i + b_j + (\alpha + 1)w$$

である。

- 同一行に存在する $S_{1,j}, \dots, S_{m,j}$ の場合。

$S_{i,j}$ の像の上限 $\alpha a_i + b_j + (\alpha + 1)w$ が $S_{i+1,j}$ の像の下限 $\alpha a_{i+1} + b_j$ より小さいことを示せばよい。

式 (2) の左辺より

$$\alpha > \frac{w}{E-w} \geq \frac{w}{a_{i+1} - a_i - w}$$

よって

$$\alpha(a_{i+1} - a_i - w) - w > 0$$

この式を整理し両辺に b_j を加えれば目的の式

$$\alpha a_{i+1} + b_j > \alpha a_i + b_j + (\alpha + 1)w$$

が成立する。

- 上の行の先頭とその行の最後にある $S_{1,j+1}$ と $S_{m,j}$ の場合。

$S_{1,j+1}$ の像の下限 $\alpha a_1 + b_{j+1}$ が $S_{m,j}$ の像の上限 $\alpha a_m + b_j + (\alpha + 1)w$ より大きいことを示せばよい。

式 (2) の右辺より

$$\alpha < \frac{M-w}{a_m - a_1 + w} \leq \frac{b_{j+1} - b_j - w}{a_m - a_1 + w}$$

であるから、式を整理すると目的の式

$$\alpha a_1 + b_{j+1} > \alpha a_m + b_j + (\alpha + 1)w$$

が成立する。よって定理は証明された。

3. アルゴリズム

3.1 アルゴリズムの構成

アルゴリズムの全体は次の 2 部分からなる。

Part A 特殊点を含む Cell を決定する。

Part B 境界線上に零点を持つ Cell を決定する。

Part A により描画される Cell

特異点, x -特異点もしくは y -特異点を持つ Cell が検出される. 本アルゴリズムでは, x -特異点が y -特異点のどちらかを判定すれば目的は達せられる. なぜならば, 解曲線が境界を通過している Cell は Part B により検出される. 解曲線が Cell 境界を通過せず, しかも特殊点を内部に持つ Cell のみを検出できればよい. この場合は, Cell の内部に孤立特異点が存在するか, 閉じた代数曲線が存在する. 前者は明らかに, x -特異点であると同時に y -特異点である. 後者の場合は, 代数曲線は Jourdan 閉路であるから, 少なくとも 2 点 x -特異点と y -特異点が存在する.

境界上に零点を持たず, 内部に閉路あるいは孤立特異点を含む Cell は, このステップを経た段階ですべて検出され描画される. 次の段階において検出される Cell も検出されるが, このステップを欠くことはできない.

Part B により描画される Cell

解曲線が Cell の境界を横断している Cell がすべて検出され描画される. 以上の処理により, すべての描画されなければならない Cell は, 過不足なく判定される. よってこのアルゴリズムを確定すればよい.

3.1.1 特殊点を含む Cell の決定

特殊点は, 特異点, x -特異点, y -特異点いずれかである. 特異点は y -特異点でもある. 前節の考察より y -特異点を検出すれば十分である. よって連立方程式,

$$f(x, y) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

を解けばよい.

$f(x, y)$ が既約で, かつ $\partial f / \partial y$ が恒等的に 0 でなければ, この連立代数方程式のなすイデアルは 0 次元であることに注意する.

多項式 $f(x, y)$ の \mathbb{Q} 上の既約分解は容易に実行できる. もとの零点は各既約成分の零点の和集合である. よって描画上は多項式 $f(x, y)$ は \mathbb{Q} 上既約であるとして一般性を失わない. さらに, $\partial f / \partial y$ が消えることは $f(x, y)$ が実は 1 変数多項式 $f(x)$ である特別な場合であり, これも容易に検出可能である. よって, 描画アルゴリズムの対象 $f(x, y)$ は既約でかつ, y の次数は 1 以上と仮定する.

この条件の下で, 連立方程式 (4), (3) の零次元の解が存在する Cell は次のように決定することができる.

[手続き]

Step 1 計算が容易な項順序で $\text{ideal}(f(x, y), \partial f / \partial y)$ の Gröbner 基底 Γ を求める (通常は全次数逆辞書式順序を用いる).

Step 2 Γ を利用して, x の最小多項式, y の最小多項式を求める.

Step 3 最小多項式の無平方部分を求め, それらをそれぞれ $M_x(x)$, $M_y(y)$ とする.

Step 4 $M_x(x)$ と $M_y(y)$ とに適当な限界公式による根の限界範囲内で Sturm 法を適用し, Cell のサイズよりも小さく, かつ式 (2) を満たす α が存在するような w の幅で根の存在範囲を分離する.

- x に関する根の存在区間が
 $[a_i, a_i + w], i = 0, \dots, m - 1,$
- y に関する根の存在区間が
 $[b_j, b_j + w], j = 0, \dots, n - 1$

とすると, 方程式の根の存在範囲の候補は式 (1) で表される正方形領域となる.

Step 5 式 (2) を満たす有理数 α を用いて, $u = \alpha x + y$ の $\text{ideal}(f, \partial f / \partial y, M_x(x), M_y(y))$ に関する最小多項式 $N(u)$ を計算する.

Step 6 Sturm 法を利用して $N(u)$ の根を 2 分探索により分離する. ここで, 分離した根の存在する u の区間と, xy -平面上に Step 4 で求めておいた正方形領域のうち方程式の零点の存在する正方形領域とは, 1 対 1 に対応する.

Step 7 $N(u)$ の根を含む区間に対応する xy -平面上の正方形領域を決定する. これにより, 描画されるべき Cell が決定される.

3.1.2 境界アルゴリズム

各々の $C_{i,j}$ に対し境界上の解の存在を判定することは, $n + m + 2$ 本の直線

$$(a_0, b_0) - (a_0, b_n), \dots, (a_m, b_0) - (a_m, b_n)$$

と

$$(a_0, b_0) - (a_m, b_0), \dots, (a_0, b_n) - (a_m, b_n)$$

上で $f(x, y)$ の Sturm 列を求めればよい. 正確にいうと, $f(a_i, y)$, $i = 0, \dots, m$, および $f(x, b_j)$, $j = 0, \dots, n$ の各々に対して Sturm 列を計算する.

この Sturm 列に対し定理 5 を適用し符号の判定を各々の Cell の境界をなしている区間

$$(a_i, b_{j-1}) - (a_i, b_j),$$

$$(a_{i-1}, b_j) - (a_i, b_j),$$

$$1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

で実行する. このアルゴリズムにより各 Cell $C_{i,j}$ の境界上に解が存在するか否かが厳密に判定できる.

4. 実行例

アルゴリズムの実装は C 言語により富士通研究所の開発した数式処理システム Risa/Asir⁴⁾ の外部関数として構成されている. 使用した計算機は, CPU

が intel Pentium III 500 Mhz OS が FreeBSD 3.2 である。

4.1 孤立特異点と埋没点の実例

実際の事例として孤立特異点を持つ場合と孤立特異点ではない Cell の中に埋没する成分を持つ場合の描画例を示す。2変数多項式 *Heart* を次のものとする。

$$\begin{aligned} \text{Heart}(x, y) = & \frac{93392896}{15625}x^6 \\ & + \left(\frac{94359552}{625}y^2 + \frac{91521024}{625}y - \frac{249088}{125} \right)x^4 \\ & + \left(\frac{1032192}{25}y^4 - 36864y^3 - \frac{7732224}{25}y^2 \right. \\ & \quad \left. - 207360y + \frac{770048}{25} \right)x^2 \\ & + 65536y^6 + 49152y^5 - 135168y^4 - 72704y^3 \\ & + 101376y^2 + 27648y - 27648 \end{aligned}$$

この多項式は 4 個の孤立特異点を次の位置に持つ。

$$\begin{aligned} & (\pm\sqrt{17150/123201}, 386/351), \\ & (\pm\sqrt{8575/2888}, 41/76). \end{aligned}$$

描画は、 $\text{Heart}(x, y)$ および $\text{Heart}(x, y) - 1/50$ に対して行う。表示領域は $-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2$ の正方形領域であり、 2400×2400 の Cell に分割した場合の描画に要した時間は、*Heart* は 3.0930 秒、*Heart*-1/50 は 3.5614 秒である。

図 1 に $\text{Heart}(x, y)$ の零点を示す。1 個の Cell に埋没する成分が 4 個の小円で囲んで示されている。これらは孤立特異点であり、本アルゴリズムにより正しく捕捉されていることが確認できる。図 2 は、 $\text{Heart}(x, y) - 1/50$ の図である。 $\text{Heart}(x, y)$ に存在した孤立特異点(零次元成分)は一次元成分に変わっている。中央下部の一次元成分は Cell の境界を跨いだため楕円状の形状が判別でき表示されている。しかし両脇の一次元成分は Cell の中に完全に埋没してしまうため、1 点だけが表示され小円で囲んで示されている。この 1 点のように見える成分のある $1.722 < x < 1.724, -0.541 < y < -0.539$ の領域を拡大表示することで図 3 のように楕円状の成分の存在が分かる。

4.2 従来の事例

文献 10) と同様の例を本アルゴリズムによって描画する実験を行った。その結果、文献 12) に含まれている例題 90 個はすべて 2 秒以下で描画できた。特に、文献 10) で描画できなかつたとされる文献 12) の ex. 90 も 1.2270 秒で問題なく描画した(図 4)。

また文献 10) の摂動を加えた事例も自動的に描画した。

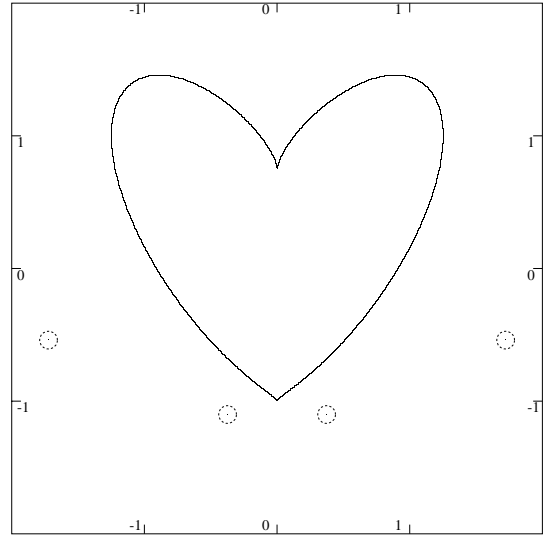


図 1 ハート関数
Fig. 1 Heart function.

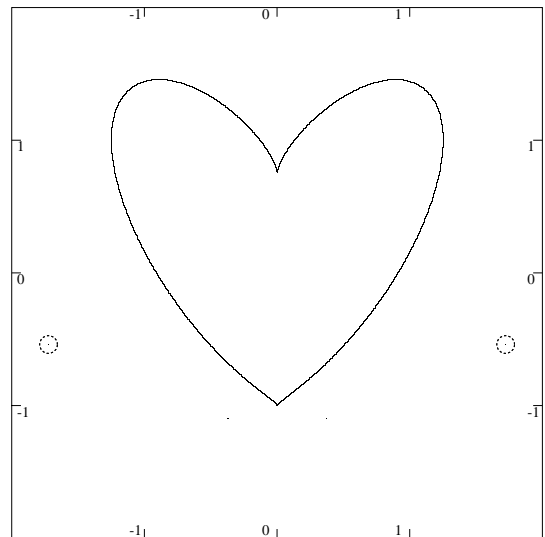


図 2 ハート関数 -1/50
Fig. 2 Heart function -1/50.

これらの人工的な例に比べて次数や係数ははるかに大きい多項式に対しても本アルゴリズムが適用できることが多くの事例で確かめられている。

5. 結 論

5.1 従来のアルゴリズムとの比較

従来の描画アルゴリズムは、そのほとんどが数値計算を基礎として構成されてきた。これに対し、代数的算法に基づいた描画アルゴリズムの研究は、特異点の正確な位置や、連結成分や分枝などの正確な幾何学的

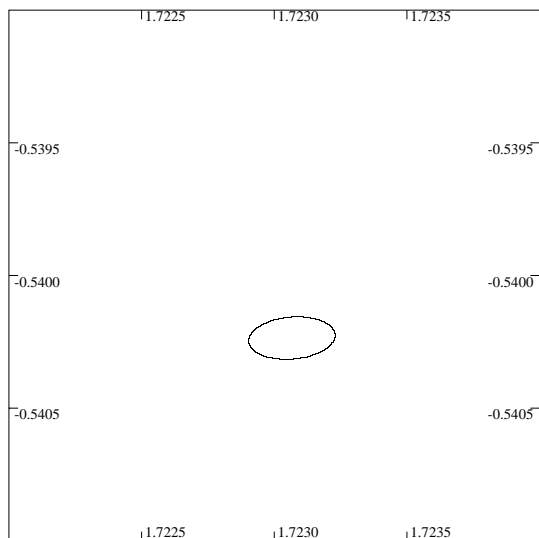


図3 図2の小円で囲まれた領域の拡大
Fig. 3 Enlargement of a circled area in Fig. 2.

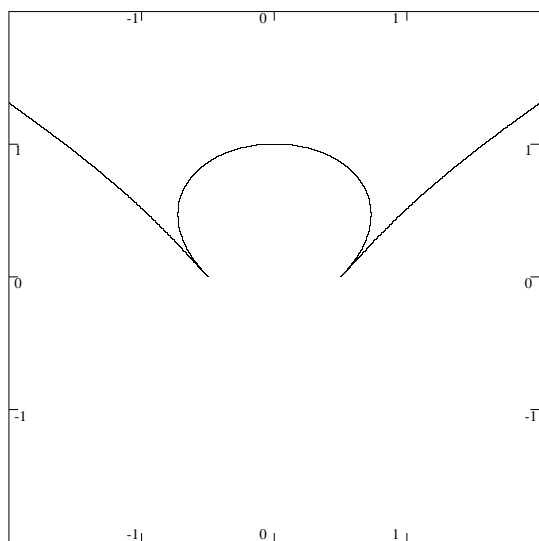


図4 文献12) ex.90
Fig. 4 Ref. 12) ex.90.

構造を調べるためになされてきており、実際的な意味でグラフを描画するために利用されることは少なかった。先駆的研究としては、文献10)が存在する。この研究では、代数曲線の分岐の追跡がある程度可能となった。しかし代数関数の構造によっては失敗する場合もある(文献12) ex.90)。文献10)は、基本的な方式として終結式を利用しているため別の問題点を持ち込んでいる。一般に終結式を多変数多項式に適用した場合、連立方程式の真の解以外の解を与える場合がある。消去された変数に関する元の多項式の主係数を終

結式の解がゼロとする場合である。

たとえば、 $f(x, y) = x^2y - 1$, $\partial f/\partial x = 2xy$ の y を消去した終結式は $2x$ となるが、この解 $x = 0$ は原方程式の解を構成しない。一方、 $g(x, y) = (x^2 - x - 1)^2y^2 + (2x^3 - 3x^2 - 6x + 1)y + 5$ と $\partial g/\partial x$ との終結式は $-20(3x^4 - 6x^3 - 38x^2 + 26x - 17)(x^2 - x - 1)^2$ である。この因子 $x^2 - x - 1$ の根 ξ は原方程式の主係数を消すにもかかわらず $(\xi, \xi - 1)$ が原方程式の解となる。

これらの例外的な場合や例外の例外などの処理アルゴリズムは Gröbner 基底を使わない場合にはきわめて複雑にならざるをえない。しかし、Gröbner 基底を用いれば簡潔なアルゴリズムが構成できる。

また文献10)では、追跡型のアルゴリズムの欠点を除去することが重要になり、この点からもアルゴリズムの構成が複雑にならざるをえない。

一方、純粋に代数計算のみにより構成された図形描画のアルゴリズムとしては、得られた図形の忠実性を保証する必要がない場合であれば文献7), 9)による研究が存在する。

数値計算に基づく描画では追跡型のアルゴリズムがよく研究されている。しかし、一般の追跡型のアルゴリズムでは、初期値の設定によってはたどれない分岐が存在する場合がある。また、刻み幅を十分小さくしなければ微小な構造を見逃すことになる。当然、この場合には計算途中で混入する誤差に対する詳細な検討が必要になる。

区間演算を利用し数値計算の不安定性を救済する方法も存在するが、高次の多項式や係数が大きい場合には、区間が非実用的に広がりすぎてしまう欠点がある(たとえば $Heart(x, y)$ など)。是正するための計算量の増大に見合う描画品質の向上は著者らの経験では見られなかった⁷⁾。

5.2 提案したアルゴリズム

純粋に代数的算法のみに基づく本論文の提案するアルゴリズムは次の点で有用である。

- 有理係数2変数の多項式の零点を任意の精度で描画する。
- 特異点, 特に孤立特異点を持つ場合でもその絶対的位置が判定できる。
- 微小成分を持つ場合その絶対的位置が判定できる。
- 過去の計算を破棄することなく描画精度を上げること, あるいは拡大表示できる。

荒い分割に対する忠実な描画を事前に求め必要な部分に関してさらに細かい分割を行って精度を向上させることも本アルゴリズムによって可能である。

- 検証不要でこれらの結果がすべて信頼できる。

本論文では、2変数多項式で定義される平面曲線を、ある正しさの基準を満足するように描画する手法を提案した。このアルゴリズムの基本は、表示しようとする領域を必要な大きさの Cell と呼ばれる部分集合に分割し、個々の Cell に関して解の存在を判別することである。この判別に誤差の概念を混入させないのでアルゴリズムの構成が単純になっている。

また、得られた図形が提案した基準に照らして正しいことを保証している。この保証は、必要精度として表示装置の解像度限界を選択した場合、理論的に正しい図形であることをも保証している。従来、関数の零点を描画した図形は、単に零点の配置の概略を表示するのみであると考えられてきたことを斟酌すると、どのような未知の図形に対しても描かれた図形が正しいという保証があることは優れた特長といえる。本アルゴリズムは、従来の数値計算を基礎とするアルゴリズムと比較した場合、確かに多大な計算を必要とする。しかし、従来のアルゴリズムでは描画できない場合や、特別な配慮がある場合であっても描画できる。特に孤立特異点がある場合や微細構造を持つ場合に安定に描画することは従来困難であった。

5.3 高次元の図形描画

3次元以上の場合に、本アルゴリズムを適用することは現時点では困難である。 n 変数多項式の場合には、その解の次元は0から $n-1$ 次元まで存在する可能性がある。このとき解が与えられた Cell に含まれているか否かの判定をすることは純粋な理論問題として未解決である。本論文で提示した手法を拡張することによって、 $n-1$ 次元と0次元の解を描画するアルゴリズムは構成できる。それ以外の次元の解をも描画することは今後の課題としたい。

参 考 文 献

- 1) Becker, T. and Weispfenning, V.: *Gröbner Bases*, Springer-Verlag, New York (1993).
- 2) Fateman, R.: Honest Plotting, Global Extrema, and Interval Arithmetic, *Proc. ISSAC '92*, New York, pp.216-223 (1992).
- 3) Knuth, D.E.: *Fundamental Algorithms, Art of Computer Programming*, 2nd edition, Vol.2, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1981).
- 4) Noro, M. and Takeshima, T.: Risa/Asir - A Computer Algebra System, *Proc. ISSAC '92*, New York, pp.387-396 (1992).
- 5) Pedersen, P., Roy, M.-F. and Szpirglas, A.: Counting real zeros in the multivari-

ate case Computational Algebraic Geometry, *Progress in Mathematics*, pp.203-223, Birkhäuser (1993).

- 6) Saito, T.: An extension of Sturm's theorem to two dimensions, *Proc. Japan Academy*, Vol.73 A, pp.18-19 (1997).
- 7) 齋藤友克, 近藤祐史, 三好善彦, 竹島 卓: Displaying Real Solution of Mathematical Equations, 数式処理, Vol.6, pp.2-21, 日本数式処理学会 (1998).
- 8) 齋藤友克, 野田松太郎: 2変数代数方程式の実特異零点を含む区間の決定, *Proc. 2nd Risa Consortium*, pp.131-139 (1998).
- 9) Takeshima, T., Noro, M. and Saito, T.: *Graphic Drawing Apparatus for Generating Graphics of Implicit Functions* (1996). U.S. Patent No.5590255.
- 10) 谷口行信, 杉原厚吉: 検出もれのない代数曲線の追跡法, 情報処理学会論文誌, Vol.33, No.10, pp.1245-1253 (1992).
- 11) Yokoyama, T., Noro, M. and Takeshima, T.: Solutions of Systems of Algebraic Equations and Linear Maps on Residue Class Rings, *J. Symbolic Computatin*, Vol.14, pp.399-417 (1992).
- 12) 坂井忠次: *グラフと追跡*, 培風館, 東京 (1963).

(平成 11 年 2 月 17 日受付)

(平成 12 年 1 月 6 日採録)



齋藤 友克 (正会員)

1950年生。1978年上智大学理工学研究科数学専攻博士課程満期退学。同年同大学数学科助手。現在にいたる。数式処理のアルゴリズムの研究とシステムの開発に従事。日本数式処理学会、日本数学会各会員。



近藤 祐史 (正会員)

1968年生。1991年愛媛大学情報工学科卒業。1993年同大学大学院理工学研究科修士課程修了。同年読間電波工業高等専門学校助手。社会人学生として、1996年愛媛大学大学院理工学研究科博士後期課程に入学。1999年読間電波工業高等専門学校講師。現在に至る。数式処理に関する研究に従事。日本数式処理学会、日本応用数理学会、人工知能学会各会員。



三好 善彦 (正会員)

1964年生. 1992年上智大学大学院理工学研究科数学専攻博士後期課程満期退学. 1993年埼玉女子短期大学講師, 1997年同助教授, 現在に至る. 数式処理における行列計算の研究に従事.

日本数式処理学会, 教育システム情報学会各会員.



竹島 卓 (正会員)

1948年生. 1976年東京工業大学大学院理工学研究科博士課程満期退学, 同年富士通(株)入社, 1990年(株)富士通研究所に移籍, 現在に至る. 数式処理アルゴリズムとシステムの開発に従事.

近年は数式処理の暗号への応用等に携わる. 日本数式処理学会, 日本計算工学会各会員.
