代用電荷法による円弧スリット単位円板領域への数値等角写像の方法

天 野 要† 岡 野 大† 緒 方 秀 教†

原点を中心とする同心円弧状の曲線スリットをともなう円板領域を円弧スリット円板領域と呼ぶ．本論文では，代用電荷法を適用して，与えられたいくつかの Jordan 閉曲線を境界とする多重連結領域から，円弧スリット単位円板領域への数値等角写像の方法を提案する．また，その有効性を数値実験的に検証する．この問題は多重連結領域の等角写像として基本的なものである．単一の Jordan 閉曲線で囲まれた有界な単連結領域から単位円板領域への場合は Riemann の写像定理として知られている．具体的には，等角写像の問題を 1 対の共役な調和関数を求める問題に帰着させ，それらの調和関数を複素対数ポテンシャルの 1 次結合で近似する．特に，ここでは複素対数関数に主値を採用して連続な近似写像関数の構成法を明示する．

Numerical Conformal Mapping onto the Unit Disk with Concentric Circular Slits by the Charge Simulation Method

Kaname Amano,† Dai Okano† and Hidenori Ogata†

We present a method of numerical conformal mapping of multiply-connected domains with closed boundary Jordan curves onto the unit disk with concentric circular slits. It is a basic problem of conformal mapping of multiply-connected domains. If the domain is bounded by a single closed Jordan curve, the problem is identified as Riemann's mapping theorem. We reduce the mapping problem to a Dirichlet problem with a pair of conjugate harmonic functions and apply the charge simulation method, where the conjugate harmonic functions are approximated by a linear combination of complex logarithmic potentials. We here give an explicit form of approximate mapping function which is continuous using the principal value of logarithmic function.

1. はじめに

Riemann の写像定理によれば，少なくとも 2 つの境界点を持つ任意の単連結領域は互いに等角同値であり，いずれも単位円の内部に等角写像することができる．しかし，多重連結領域の場合には，単位円のような単一の理想的な標準領域は存在しない．このことは，等角写像が同相写像であり，領域の多重度を保存することから明らかである．さらに，多重連結領域の場合には，領域の多重度を固定してもなお単一の標準領域は存在しない．相互に等角写像できるのはモジュラスと呼ばれる保存量を同じくする領域間に限られる．一般的に，$n\,(\geq 3)$ 重連結領域は $3n-6$ 個の実数値をモジュラスに持ち，相互に等角写像できるのはこれらの値を同じくする領域間に限られる．多重連結領域の等角写像の可能性と一意性に関しては古くから知られていて，たとえば Nehari[21] に詳しい．

多重連結領域の場合にも，標準領域の幾何学的な形状を適当に設定すれば，領域の多重度とモジュラスの値を固定することなく等角写像の問題を議論することができる．このような領域はスリットをともなうことが多い．Nehari は典型的な標準領域として，(a) 平行スリット領域，(b) 円弧スリット領域，(c) 放射スリット領域，(d) 円弧スリットをともなう円板領域，(e) 円弧スリットをともなう円環領域，をあげている（**図 1**）．応用上重要な問題の多くはこのような標準領域の場合である．たとえば，無限遠点を含む非有界な多重連結領域から，(a) 平行スリット領域，(b) 円弧スリット領域，(c) 放射スリット領域，への等角写像は流体力学への応用上広く知られた問題である．これらの等角写像によって，(a) 一様な平行流中に障害物が置かれた場合，(b) 渦点の周囲に障害物が置かれた場合，(c) 湧き出し（または，吸い込み）点の周囲に障害物が置

† 愛媛大学工学部情報工学科
Department of Computer Science, Faculty of Engineering, Ehime University

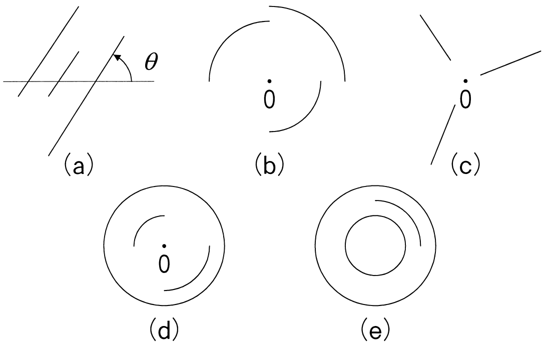


図 1　スリットをともなう標準領域
Fig. 1　Standard domains with slits from Nehari (1952).

かれた場合，の 2 次元ポテンシャル流を解析することができる．標準領域 (d) と (e) への等角写像もまた電磁場の解析等に重要である．しかし，これまで多重連結領域への等角写像の数値計算法すなわち数値等角写像の方法は必ずしも十分に研究されてこなかった．

このような背景の中で，天野ら[4)~6),8)]は与えられたいくつかの Jordan 閉曲線の外側の無限遠点を含む非有界な多重連結領域から，(a) 平行スリット領域，(b) 円弧スリット領域，(c) 放射スリット領域，への数値等角写像の方法を提案し，その有効性を数値実験的に検証した．具体的には，これらの等角写像の問題を 1 対の共役な調和関数を求める問題に帰着させ，代用電荷法を適用して，それらの調和関数を複素対数ポテンシャルの 1 次結合で近似する．その方法は数値等角写像の方法として著名な Symm の第 1 種 Fredholm 型の積分方程式[10),11),24)~26)]を用いて定式化することも可能である．

これとは独立に，久原ら[13)]は，絶縁物境界に囲まれた電流場の問題を対象に，有界な多重連結領域から放射スリット領域への数値等角写像の方法を提案している．天野らと久原らの研究では，問題の領域に非有界か有界かという違いはあるが，代用電荷法を適用した数値計算法の本質は同じである．さらに，久原ら[14),15)]は，上記の (e) 円弧スリットをともなう円環領域と，放射スリットをともなう円環領域への数値等角写像の方法を提案し，その有効性を数値実験的に検証している．特に，そこで提案された調和測度・容量係数法と呼ばれる方法では，調和測度の電磁気学的な解釈に基づいて，電磁気学で重要な相互容量をすべて計算することが可能である．

本論文では，同様に代用電荷法を適用して，与えられたいくつかの Jordan 閉曲線を境界とする有界な多重連結領域から，円弧スリット単位円板領域，すなわち上記の (d) 円弧スリットをともなう円板領域の円板を単位円としたもの，への数値等角写像の方法を提案し，その有効性を数値実験的に検証する．この問題は多重連結領域の等角写像として最も基本的なものである．実際，その写像関数から，(b) 円弧スリット領域や (e) 円弧スリットをともなう円環領域への写像関数を導くことも可能である[21)]．特に，単一の Jordan 閉曲線で囲まれた有界な単連結領域から単位円板領域への場合は Riemann の写像定理として知られている．

なお，n 個の Jordan 閉曲線を境界とすれば，等角写像の可能性と一意性は，問題の領域が有界であるか非有界であるか，および，単位円に写像される曲線としてどれを指定するか，には依存しない．ここでは，問題の領域が有界で，外側の曲線が単位円に移るような最も自然な問題の近似写像関数の構成法を記す．その他の問題に対しては必要な前変換を与える．

積分方程式法を中心とした数値等角写像の方法に関しては Henrici[9)]，Trefethen[27)] に詳しい．Reichel[23)] と Mayo[17)] は本論文と同じ多重連結領域の問題に調和関数の 1 重層対数ポテンシャル表現による第 1 種 Fredholm 型の積分方程式法と 2 重層対数ポテンシャル表現による Mikhlin の積分方程式法[16),18)]を適用している．ここでは，これらと同じ問題領域に代用電荷法を適用して計算精度を比較する．なお，本論文で提示される近似写像関数は複素対数関数に主値を採用して連続である．また，積分方程式法に比較して表現が簡潔であり，前述の変換公式の利用等に応用の可能性があることも強調したい．代用電荷法の数学的側面に関しては岡本ら[22)]，室田[20)]，応用的側面に関しては村島[19)]，特に数値等角写像への適用については天野[1),2)]等も参照されたい．

2．写 像 定 理

任意の多重連結領域は原点を中心とする同心円弧状の曲線スリットをともなう円板領域すなわち円弧スリット円板領域へ等角写像することができる．ここでは，z 平面上の Jordan 閉曲線 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ を境界とする n 重連結領域 D から，w 平面上の円弧スリット単位円板領域への等角写像を考える．このとき，単位円に移る閉曲線 C_l と原点に移る D 内の 1 点 z_0 を任意に指定することができる．その写像関数を $w = f_l(z; z_0)$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ とすれば，問題の等角写像は（単位円に移る曲線 C_l を指定し，D 内に 1 点 z_0 をとって，$f_l(z_0; z_0) = 0$,）$f_l'(z_0; z_0) > 0$ なる正規化条件の下に一意的に定まる．以後，この正規化点 z_0 を座標系の原点にとり，その写像関数を $w = f_l(z) = f_l(z; 0)$ と記す．

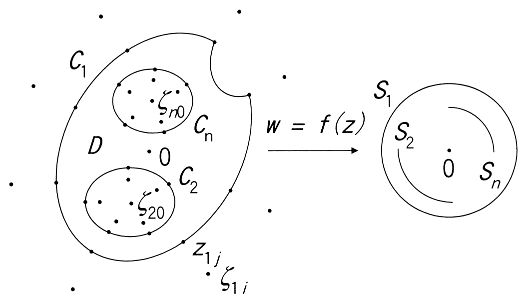


図 2 代用電荷法による円弧スリット単位円板領域への等角写像
Fig. 2 Conformal mapping onto the unit disk with circular slits by the charge simulation method.

2.1 有界な n 重連結領域 1

ここでは，まず，問題の領域 D は有界な n 重連結領域であるとし，D を囲む外側の閉曲線を C_1，D に囲まれる内側の閉曲線を $C_2, \ldots, C_n$ とする（**図 2**）．さらに，外側の閉曲線 C_1 を単位円に移すような等角写像 $w = f_1(z)$ を考える．写像の結果，曲線 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ は原点を中心とする半径 $r_1 = 1$ の単位円 S_1 と半径 $r_2, \ldots, r_n$ の円弧スリット $S_2, \ldots, S_n$ に移る．これらのスリットの位置と長さは上記の正規化条件によって写像関数とともに定まる．この問題は $n = 1$ すなわち D が単一の閉曲線 C_1 で囲まれた有界な単連結領域の場合には Riemann の写像定理として知られている．

問題の等角写像の写像関数を

$$f_1(z) = \frac{z}{r_D} \exp(g(z) + \mathrm{i}h(z)) \tag{1}$$

と表現する．ここに，$g(z)$ と $h(z)$ は D で共役な調和関数である．また，r_D は $f_1'(0) = 1/r_D > 0$ となる正の定数である（すなわち，写像 $w = f_1^*(z) = r_D f_1(z)$ は $f_1^*(0) = 0$，${f_1^*}'(0) = 1$ の条件の下に D を半径 r_D の円板領域 $|w| < r_D$ へ等角写像する）．曲線 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ が半径 $r_1 = 1$ の単位円 S_1 と半径 $r_2, \ldots, r_n$ の円弧スリット $S_2, \ldots, S_n$ に移るという境界条件 $|f_1(z)| = r_l$ $(z \in C_l)$ から，$g(z)$ は

$$g(z) + \log|z| - \log r_D = \log r_l \tag{2}$$
$$(z \in C_l;\ l = 1, 2, \ldots, n),$$

$$r_1 = 1 \tag{3}$$

を満たさなければならない．また，正規化条件 $f_1'(0) = 1/r_D > 0$ から，$g(z)$ と $h(z)$ は

$$g(0) + \mathrm{i}h(0) = 0 \tag{4}$$

を満たさなければならない．

逆に，式 (2)，(3)，(4) が成立すれば，式 (1) の $f_1(z)$ が問題の等角写像の正規化条件を満たすことは容易に分かる．解の存在と一意性から，等角写像の問題はこのような共役な調和関数 $g(z)$ と $h(z)$ を r_D の値とともに求める問題に帰着する．

2.2 有界な n 重連結領域 2

次に，同じ問題領域 D で，内側の閉曲線 C_l のいずれかを単位円に移すような等角写像 $w = f_l(z)$ $(l = 2, \ldots, n)$ を考える．この場合には，まず，C_l の内側に 1 点 ζ_{l0} をとり，変換

$$z^*(z) = \frac{1}{z - \zeta_{l0}} + \frac{1}{\zeta_{l0}} \quad (l = 2, \ldots, n) \tag{5}$$

によって，z 平面上の領域 D を z^* 平面上の領域 D^* に移す．この D^* は，C_l の像である閉曲線 C_l^* で囲まれた有界な n 重連結領域となり，原点 $z = 0$ は原点 $z^*(0) = 0$ に移る．D^* から w 平面上の円弧スリット単位円板領域への等角写像 $w = f_l^*(z^*)$ の問題は前節の $w = f_1(z)$ の問題と同じである．当初の正規化条件 $f_l(0) = 0$, $f_l'(0) > 0$ を満たす解 $w = f_l(z)$ は

$$f_l(z) = \exp\left\{\mathrm{i} \arg\left(\frac{1}{\zeta_{l0}^2}\right)\right\} f_l^*(z^*) \tag{6}$$

で得られる．

2.3 非有界な n 重連結領域

ここでは，問題の領域 D は閉曲線 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ の外側の無限遠点を含む非有界な n 重連結領域であるとし，これらの閉曲線のいずれかを単位円に移すような等角写像 $w = f_l(z)$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ を考える．その場合にも，同じ変換

$$z^*(z) = \frac{1}{z - \zeta_{l0}} + \frac{1}{\zeta_{l0}} \quad (l = 1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

によって，領域 D を C_l^* で囲まれた有界な領域 D^* に移すことができる．当初の正規化条件を満たす解が式 (6) で得られることも同様である．

3. 数値的方法

以後，2.1 節の有界な n 重連結領域 1 の場合の等角写像 $w = f_1(z)$ を対象として，これを単に $w = f(z)$ と記す．また，対数関数の数値計算には主値を用いることにする．

代用電荷法を適用し，式 (1) の共役な調和関数 $g(z)$ と $h(z)$ を定数項をともなう複素対数ポテンシャルの 1 次結合で近似して，問題の等角写像の近似写像関数を

$$F(z) = \frac{z}{R_D} \exp(G(z) + \mathrm{i}H(z)), \tag{8}$$

$$G(z) + \mathrm{i}H(z) = Q_0 + \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log(z - \zeta_{li}) \tag{9}$$

と表現する．ここに，Q_0 は複素定数，Q_{li} は電荷と呼ばれる実数の未定係数である．電荷は問題の領域 D

の外部すなわち閉曲線 C_1 の外側と $C_2, \ldots, C_n$ の内側にそれぞれ $N_1, N_2, \ldots, N_n$ 個配置される．電荷が配置された点 ζ_{li} は電荷点と呼ばれ，対数ポテンシャルの極になる．

まず，電荷は Symm の積分方程式法[10),11),24)~26)] のソース密度を離散化したものであるという解釈[3),7)] で，C_1 の外側の電荷に対して

$$\sum_{i=1}^{N_1} Q_{1i} = -1 \tag{10}$$

という制約条件を課す．また，式 (9) の虚部 $H(z)$ は一般的に無限多価であり，これが D 内で 1 価であるためには，D 内の任意の閉曲線 $\tilde{C}$ に対して，

$$\int_{\tilde{C}} \mathrm{d}H(z) = 0$$

でなければならない．この条件は，曲線 C_l $(l = 2, \ldots, n)$ のみを囲む任意の閉曲線 $\tilde{C}_l$ に対して，個別に

$$\begin{aligned}
&\int_{\tilde{C}_l} \mathrm{d}H(z)\\
&\quad = \int_{\tilde{C}_l} \mathrm{d} \sum_{m=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_m} Q_{mi} \arg(z - \zeta_{mi})\\
&\quad = \sum_{m=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_m} Q_{mi} \int_{\tilde{C}_l} \mathrm{d} \arg(z - \zeta_{mi})\\
&\quad = \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \int_{\tilde{C}_l} \mathrm{d} \arg(z - \zeta_{li})\\
&\qquad + \sum_{m=1}^{(\neq l)n} \sum_{i=1}^{N_m} Q_{mi} \int_{\tilde{C}_l} \mathrm{d} \arg(z - \zeta_{mi})\\
&\quad = 2\pi \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li}\\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

すなわち

$$\sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} = 0 \quad (l = 2, \ldots, n) \tag{11}$$

が成立することと同値である．

このような制約条件のもとに，複素定数 Q_0 と電荷 Q_{li} は曲線 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ 上に配置された $N_1, N_2, \ldots, N_n$ 個の拘束点 z_{mj} で境界条件 (2)，(3) を満たすように定められる．すなわち，これらは拘束条件と呼ばれる連立 1 次方程式

$$G(z_{mj}) - \log R_m - \log R_D = -\log |z_{mj}| \tag{12}$$
$$(z_{mj} \in C_m;\ j = 1, 2, \ldots, N_m;\ m = 1, 2, \ldots, n)$$

$$R_1 = 1 \tag{13}$$

を満たさなければならない．R_m と R_D は r_m と r_D の近似値である．

3.1 定式化 1

ここで，式 (9) に正規化条件 (4) を課せば，

$$\begin{aligned}
G(0) + \mathrm{i}H(0) &= Q_0 + \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log(-\zeta_{li})\\
&= 0
\end{aligned}$$

である．そこで，式 (9) を

$$\begin{aligned}
&G(z) + \mathrm{i}H(z)\\
&\quad = Q_0 + \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log(z - \zeta_{li})\\
&\qquad - Q_0 - \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log(-\zeta_{li})\\
&\quad = \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log\left(1 - \frac{z}{\zeta_{li}}\right)
\end{aligned} \tag{14}$$

と変形する．このように，$G(z) + \mathrm{i}H(z)$ に正規化条件を課して，複素定数 Q_0 は消去することができる．この $G(z)$ を用いれば，式 (10)，(11)，(12)，(13) は $N_1 + N_2 + \cdots + N_n + n + 1$ 個の未知数 Q_{li}，R_m，R_D に対する $N_1 + N_2 + \cdots + N_n + n + 1$ 元連立 1 次方程式を構成する．したがって，次のような数値等角写像の方法を得る．

定式化 1：近似写像関数を

$$F(z) = \frac{z}{R_D} \exp(G(z) + \mathrm{i}H(z)),$$
$$G(z) + \mathrm{i}H(z) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log\left(1 - \frac{z}{\zeta_{li}}\right)$$

と表現する．電荷 $Q_{11}, Q_{12}, \ldots, Q_{nN_n}$ と半径 $R_1, R_2, \ldots, R_n$ および定数 R_D は $N_1 + N_2 + \cdots + N_n + n + 1$ 元連立 1 次方程式

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log\left|1 - \frac{z_{mj}}{\zeta_{li}}\right|\\
&\quad - \log R_m - \log R_D = -\log |z_{mj}|
\end{aligned}$$

$$(z_{mj} \in C_m;\ j = 1, 2, \ldots, N_m;\ m = 1, 2, \ldots, n),$$
$$R_1 = 1,$$
$$\sum_{i=1}^{N_1} Q_{1i} = -1,$$
$$\sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} = 0 \quad (l = 2, \ldots, n)$$

の解である． □

この定式化では，主値 $\mathrm{Log}(1 - z/\zeta_{li})$ は原点から見た電荷点 ζ_{li} の背後（すなわち，ζ_{li} と無限遠点の間）に $2\pi\mathrm{i}$ の不連続を生じる．領域 D で連続な近似写像関数を得るにはさらに工夫を要する．

ここでは，簡単のため，閉曲線 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ はすべて凸であると仮定する．このとき，問題の幾何学的な形状から，次のような計算規則を設けて $H(z)$ すなわち $F(z)$ の連続性を保つことは可能である．

規則：領域 D 内で，原点から出発し，不連続線は必ず一定の方向に（たとえば，π から $-\pi$ の方向に）横切って評価点 z に至る経路を考える．そして，横切った不連続線に対応する $\mathrm{Log}(1 - z/\zeta_{li})$ の値に適当な（上記の場合には，$+2\pi\mathrm{i}$ の）補正を行う． □

しかし，このような規則に基づいて，与えられた問題領域に対して自動的に補正を行うアルゴリズムの構成は必ずしも簡単ではない．この不連続の問題は複素対数関数の基本周期である $2\pi\mathrm{i}$ の範囲をどのようにとっても不可避である．ここでは，定式化 1 に関する連続性の問題をこれ以上詳細に論じることはしないで，このような補正を必要としない近似写像関数の構成法を考えることにする．

ただし，定式化 1 は $n = 1$ すなわち Riemann の写像定理として知られる問題で $C = C_1$ が原点に対して星形であれば D 内で連続な近似写像関数の構成法を与える．この場合の R_D は領域 D の原点（一般的には，正規化点 z_0）における写像半径と呼ばれる[28]．

定式化 1S：近似写像関数を

$$F(z) = \frac{z}{R_D}\exp(G(z) + \mathrm{i}H(z)),$$
$$G(z) + \mathrm{i}H(z) = \sum_{i=1}^{N} Q_i \log\left(1 - \frac{z}{\zeta_i}\right)$$

と表現する．電荷 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ と写像半径 R_D は $N + 1$ 元連立 1 次方程式

$$\sum_{i=1}^{N} Q_i \log\left|1 - \frac{z_j}{\zeta_i}\right| - \log R_D = -\log|z_j|$$
$$(z_j \in C;\ j = 1, 2, \ldots, N)$$
$$\sum_{i=1}^{N} Q_i = -1$$

の解である． □

この定式化は，単連結領域内部問題に対する天野[3]，天野・井上[7]，井上・天野[12] のスキームとパラメータ表現上の違いを除いて同等である．

3.2 定 式 化 2

ここでは，曲線 C_1 と $C_2, \ldots, C_n$ が原点とそれぞれの内側の 1 点 $\zeta_{20}, \ldots, \zeta_{n0}$ に対して星形であると仮定する．この場合には，式 (11) を用いて，式 (9) を

$$\begin{aligned}
&G(z) + \mathrm{i}H(z)\\
&\quad = Q_0 + \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{N_l} Q_{li}\log(z - \zeta_{li})\\
&\qquad - \sum_{l=2}^{n}\sum_{i=1}^{N_l} Q_{li}\log(z - \zeta_{l0})\\
&\quad = Q_0 + \sum_{i=1}^{N_1} Q_{1i}\left\{\log\left(1 - \frac{z}{\zeta_{1i}}\right) + \log(-\zeta_{1i})\right\}\\
&\qquad + \sum_{l=2}^{n}\sum_{i=1}^{N_l} Q_{li}\log\left(\frac{z - \zeta_{li}}{z - \zeta_{l0}}\right) \qquad (15)
\end{aligned}$$

と変形することができる．主値 $\mathrm{Log}(1 - z/\zeta_{1i})$ の不連続は原点から見た ζ_{1i} の背後に，$\mathrm{Log}((z - \zeta_{li})/(z - \zeta_{l0}))$ の不連続は ζ_{li} と ζ_{l0} を結ぶ直線上に現れる．したがって，この $H(z)$ は D 内で連続である．式 (15) に正規化条件 (4) を課せば，

$$\begin{aligned}
&G(0) + \mathrm{i}H(0)\\
&\quad = Q_0 + \sum_{i=1}^{N_1} Q_{1i}\log(-\zeta_{1i})\\
&\qquad + \sum_{l=2}^{n}\sum_{i=1}^{N_l} Q_{li}\log\left(\frac{\zeta_{li}}{\zeta_{l0}}\right)\\
&\quad = 0 \qquad (16)
\end{aligned}$$

となる．したがって，式 (15) から式 (16) を引いて Q_0 を消去し，次のように D 内で連続な近似写像関数を構成することができる．

定式化 2（星形の場合）：曲線 C_1 と $C_2, \ldots, C_n$ が原点とそれぞれの内側の 1 点 $\zeta_{20}, \ldots, \zeta_{n0}$ に対して星形であれば，近似写像関数を

$$\begin{aligned}
&F(z) = \frac{z}{R_D}\exp(G(z) + \mathrm{i}H(z)),\\
&G(z) + \mathrm{i}H(z)\\
&\quad = \sum_{i=1}^{N_1} Q_{1i}\log\left(1 - \frac{z}{\zeta_{1i}}\right)\\
&\qquad + \sum_{l=2}^{n}\sum_{i=1}^{N_l} Q_{li}\left\{\log\left(\frac{z - \zeta_{li}}{z - \zeta_{l0}}\right)\right.\\
&\qquad \left. - \log\left(\frac{\zeta_{li}}{\zeta_{l0}}\right)\right\}
\end{aligned}$$

と表現することができる．電荷 $Q_{11}, Q_{12}, \ldots, Q_{nN_n}$ と半径 $R_1, R_2, \ldots, R_n$ および定数 R_D は $N_1 + N_2 + \cdots + N_n + n + 1$ 元連立 1 次方程式

$$\sum_{i=1}^{N_1} Q_{1i} \log\left|1-\frac{z_{mj}}{\zeta_{1i}}\right| + \sum_{l=2}^{n}\sum_{i=1}^{N_l} Q_{li}\left(\log\left|\frac{z_{mj}-\zeta_{li}}{z_{mj}-\zeta_{l0}}\right| - \log\left|\frac{\zeta_{li}}{\zeta_{l0}}\right|\right) - \log R_m - \log R_D = -\log|z_{mj}|$$

$$(z_{mj}\in C_m;\ j=1,2,\ldots,N_m;\ m=1,2,\ldots,n),$$

$$R_1 = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{N_1} Q_{1i} = -1,$$

$$\sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} = 0 \quad (l=2,\ldots,n)$$

の解である．□

3.3 定式化 3

曲線 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ が星形であるとは限らない一般の場合には，式 (10) と式 (11) を用いて，式 (9) を

$$\begin{aligned} G(z)+\mathrm{i}H(z) &= Q_0 + \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{N_l} Q_{li}\log(z-\zeta_{li}) \\ &= Q_0 + \sum_{l=1}^{n}\left\{Q_{l1}\log(z-\zeta_{l1}) + \sum_{i=2}^{N_l}\left(\sum_{k=1}^{i}Q_{lk} - \sum_{k=1}^{i-1}Q_{lk}\right)\log(z-\zeta_{li})\right\} \\ &= Q_0 + \sum_{l=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{N_l-1}\left(\sum_{k=1}^{i}Q_{lk}\right)\cdot (\log(z-\zeta_{li}) - \log(z-\zeta_{li+1})) + \left(\sum_{k=1}^{N_l}Q_{lk}\right)\log(z-\zeta_{lN_l})\right\} \\ &= Q_0 + \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{N_l-1}\left(\sum_{k=1}^{i}Q_{lk}\right)\log\left(\frac{z-\zeta_{li}}{z-\zeta_{li+1}}\right) - \log(z-\zeta_{1N_1}) \end{aligned} \tag{17}$$

と変形する．主値 $\mathrm{Log}((z-\zeta_{li})/(z-\zeta_{li+1}))$ の不連続は ζ_{li} と ζ_{li+1} を結ぶ直線（ただし，電荷点 ζ_{lN_l} と ζ_{l1} の間を除く）上に現れる．したがって,（ζ_{1N_1} に起因する不連続については後述することにして）電荷点をある程度密に配置すれば，この $H(z)$ は D 内で連続である．式 (17) に正規化条件 (4) を課せば，

$$\begin{aligned} G(0)+\mathrm{i}H(0) &= Q_0 + \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{N_l-1}\left(\sum_{k=1}^{i}Q_{lk}\right)\log\left(\frac{\zeta_{li}}{\zeta_{li+1}}\right) - \log(-\zeta_{1N_1}) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

である．したがって，式 (17) から式 (18) を引いて Q_0 を消去し，次のように D 内で連続な近似写像関数を構成することができる．

定式化 3（一般の場合）：曲線 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ が星形であるとは限らない一般の場合には，近似写像関数を

$$F(z) = \frac{z}{R_D}\exp(G(z)+\mathrm{i}(H(z)),$$

$$G(z)+\mathrm{i}H(z) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{N_l-1} Q_l^i\left\{\log\left(\frac{z-\zeta_{li}}{z-\zeta_{li+1}}\right) - \log\left(\frac{\zeta_{li}}{\zeta_{li+1}}\right)\right\} - \log\left(1-\frac{z}{\zeta_{1N_1}}\right)$$

と表現する．ここに，未定係数である電荷の部分和

$$Q_l^i = \sum_{k=1}^{i} Q_{lk}$$

$$(i=1,2,\ldots,N_l-1;\ l=1,2,\ldots,n)$$

と半径 $R_1, R_2, \ldots, R_n$ および定数 R_D は $N_1+N_2+\cdots+N_n+1$ 元連立 1 次方程式

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{N_l-1} Q_l^i\left\{\log\left|\frac{z_{mj}-\zeta_{li}}{z_{mj}-\zeta_{li+1}}\right| - \log\left|\frac{\zeta_{li}}{\zeta_{li+1}}\right|\right\} - \log R_m - \log R_D = \log\left|1-\frac{z_{mj}}{\zeta_{1N_1}}\right| - \log|z_{mj}|$$

$$(z_{mj}\in C_m;\ j=1,2,\ldots,N_m;\ m=1,2,\ldots,n),$$

$$R_1 = 1$$

の解である．ただし，この場合には，主値 $\mathrm{Log}(1-z/\zeta_{1N_1})$ の不連続線が D にかからないように ζ_{1N_1} を配置する．□

3.4 誤差評価

解析関数の最大値の定理によれば，有界閉領域で連続で内部で解析的な関数の絶対値は境界上で最大値をとる．したがって，上記の定式化のいずれの場合でも，近似写像関数の誤差は曲線 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ 上のいずれかの点で最大値をとり，

$$E_F(z) = |F(z)-f(z)| \le \max_{z\in C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_n}|F(z)-f(z)| = E_F \tag{19}$$

で評価できる．

4. 数値実験

前章の定式化 2 で数値実験を行う．誤差の指標として，

$$E_{Ml} = \max_{1\le j\le N_l} ||F(z_{lj+1/2})| - R_l|,$$
$$E_{Rl} = |R_l - R_{ld}| \quad (l=1,2,\ldots,n)$$

と

$$E_{RD} = |R_D - R_{Dd}|$$

を計算する．ここに，$z_{lj+1/2}$ は C_l 上の拘束点 z_{lj} と z_{lj+1} の中間点であり，R_{ld} と R_{Dd} は電荷数を倍増した場合の計算値である．

計算結果の提示には次の記号を用いる．

- N：電荷数．以下の例では $N_1 = N_2 = \cdots = N_n = N$ とする．
- q：電荷配置のパラメータ（$0<q<1$）．
- $cond$：連立 1 次方程式の係数行列の L_1 条件数．

数値実験は東芝 AS4080/51GX 上の FORTRAN 倍精度計算による．連立 1 次方程式の求解と条件数の評価には IMSL を使用する．解の反復改良は行わない．

4.1 例 1

問題の領域 D は円

$$C_1 : |z| = 0.35,$$
$$C_2, C_3 : |z \mp 0.14| = 0.08$$

を境界とする実軸と虚軸に対称な 3 重連結領域で，$\zeta_{20} = 0.14$, $\zeta_{30} = -0.14$ である．拘束点と電荷点は

$$z_{1j} = 0.35\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j},\ \zeta_{1j} = 0.35q^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j},$$
$$z_{2j}, z_{3j} = 0.08\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j} \pm 0.14,$$
$$\zeta_{2j}, \zeta_{3j} = 0.08q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j} \pm 0.14,$$
$$\theta_j = \frac{2\pi(j-1)}{N} \quad (j=1,2,\ldots,N)$$

と配置する．

図 3 と**表 1** に計算結果を示す．R_l と R_D は電荷を倍増して異なる数字が現れる桁までの値である．円を境界とする問題は代用電荷法の得意とするところで，この例でも前述の指標で非常に高い精度が得られる．スリットの位置の精度は特に高い．E_{Ml} は内側の円上で最大値をとる．

表 1 の $N=128$ の場合には連立 1 次方程式の係数行列が悪条件となる．この場合にも，電荷配置のパラメータを $q=0.8$ として電荷を境界に近づければ，$E_{M1} = 2.1\times10^{-14}$，$E_{M2} = 4.4\times10^{-13}$，$E_{M3} = 1.0\times10^{-13}$，$cond = 3.0\times10^{8}$ という結果が得られる．$N=64$ の C_2 と C_3 の 2 行目は R_{ld} と R_{Dd} にこのときの値を用いたものである．それらの値を採用すれば，N の増加に対して誤差は単調に減少している．

Mayo[17] は同じ問題に調和関数の 2 重層対数ポテンシャル表現による Mikhlin の積分方程式法を適用している．計 180 点（$N=60$ に相当）を用いて図 3 と同様な図を得ているが，計算精度についての記述はない．

4.2 例 2

問題の領域 D は楕円と円

$$C_1 : \frac{x^2}{4^2} + y^2 = 1,$$
$$C_2 : |z - 1.2| = 0.3,$$
$$C_3 : |z + 1| = 0.6$$

を境界とする実軸に対称な 3 重連結領域で，$\zeta_{20} = 1.2$, $\zeta_{30} = -1$ である．楕円 C_1 に対する拘束点と電荷点の配置には Joukowski 変換

$$z(t) = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \quad (a>b>0)$$

を用いる．この変換は t 平面上の単位円 $|t|=1$ と半径 ρ の同心円 $|t| = \rho\ (>1)$ をそれぞれ z 平面上の実軸上の閉区間 $[-\sqrt{a^2-b^2}, \sqrt{a^2-b^2}]$ とその両端点を焦点とする楕円に写像する．特に，半径 $\rho = \sqrt{(a+b)/(a-b)}$ の円は楕円 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ に移る．そこで，$a=4$，$b=1$ の場合の変換

$$z(t) = \frac{\sqrt{15}}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$$

を利用して，楕円 C_1 に対する拘束点と電荷点を

$$z_{1j} = z\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}\right),\ \zeta_{1j} = z\left(\sqrt{\frac{5}{3}}q^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}\right),$$
$$\theta_j = \frac{2\pi(j-1)}{N} \quad (j=1,2,\ldots,N)$$

と配置する．円 C_2 と C_3 に対する拘束点と電荷点は例 1 と同様に

$$z_{2j} = 0.3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j} + 1.2, \quad \zeta_{2j} = 0.3q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j} + 1.2,$$
$$z_{3j} = 0.6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j} - 1, \quad \zeta_{3j} = 0.6q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j} - 1,$$
$$\theta_j = \frac{2\pi(j-1)}{N} \quad (j=1,2,\ldots,N)$$

と配置する．

図 4 と**表 2** に計算結果を示す．この場合にも，R_l と R_D は電荷を倍増して異なる数字が現れる桁までの値である．また，$N=128$ の場合には連立 1 次方程式の係数行列が悪条件となるので，電荷配置のパラメータを $q=0.8$ とすれば，$E_{M1} = 9.1\times10^{-08}$，$E_{M2} = 4.9\times10^{-14}$，$E_{M3} = 6.9\times10^{-14}$，$cond = 3.0\times10^{8}$

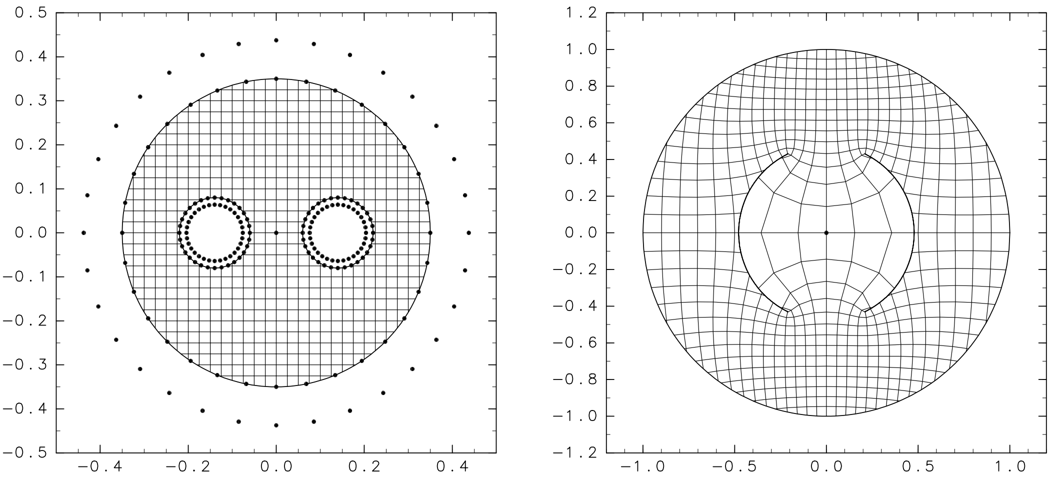


図 3　数値等角写像（例 1：$N = 32,\ q = 0.8$）
Fig. 3　Numerical conformal mapping of the domain with three circluar boundary curves.

表 1　計算精度（例 1：$q = 0.5$）
Table 1　Numerical results for Example 1 ($q = 0.5$).　N^* shows the case of ill-conditioning. The second lines of C_2 and C_3 ($N = 64$) are from comparison with $N = 128, q = 0.8$.

N		E_{Ml}	E_{Rl}	R_l	E_{RD}	R_D	$cond$
	C_1	5.2×10^{-05}	0.	1.			
16	C_2	3.4×10^{-04}	1.3×10^{-06}	0.478738	1.4×10^{-05}	0.16805	5.5×10^{03}
	C_3	3.4×10^{-04}	1.3×10^{-06}	0.478738			
	C_1	3.2×10^{-08}	0.	1.			
32	C_2	2.3×10^{-06}	4.7×10^{-12}	0.478739634602	2.6×10^{-09}	0.168062558	3.1×10^{06}
	C_3	2.3×10^{-06}	4.7×10^{-12}	0.478739634602			
	C_1	2.4×10^{-13}	0.	1.			
64	C_2	1.6×10^{-10}	2.1×10^{-10}	0.4787396346	4.2×10^{-11}	0.16806256084	4.1×10^{11}
			9.2×10^{-15}	0.478739634607047	1.8×10^{-15}	0.168062560835113	
	C_3	1.6×10^{-10}	3.2×10^{-10}	0.4787396346			
			5.0×10^{-17}	0.47873963460704499			
	C_1	1.1×10^{-08}	0.	1.			
128^*	C_2	4.5×10^{-09}					4.2×10^{22}
	C_3	4.3×10^{-09}					

という結果が得られる．$N = 64$ の C_2 と C_3 の 2 行目は R_{ld} と R_{Dd} にこのときの値を用いたものである．E_{Ml} は外側の楕円上で最大値をとる．

Reichel[23] は同じ問題に調和関数の 1 重層対数ポテンシャル表現による第 1 種 Fredholm 型の積分方程式法を適用している．計 189（$N = 63$ に相当するが，実際には計算量を節約して $N = 19$ 相当分を Cholesky 分解している）変数を用いた Fourier-Galerkin 法による反復計算の結果として，

$$E_{M1} = 4.3 \times 10^{-3},\quad R_1 = 2.5000001,$$
$$E_{M2} = 5.5 \times 10^{-4},\quad R_2 = 1.9555848,$$
$$E_{M3} = 3.8 \times 10^{-3},\quad R_3 = 1.744207$$

という値を得ている．円板の半径の理論値は $r_1 = 2.5$ で，これは曲線 C_1 の容量の値である．

問題の条件の違いを考慮した公平な比較のためには，代用電荷法の E_{Ml} と R_l の値を 2.5 倍しなければならない．それでも，E_{Ml} を指標として，代用電荷法の精度は Reichel の結果より 1 桁程度高い．Reichel は R_2 と R_3 の値の信頼性については何も記していない．しかし，代用電荷法と Reichel の結果は両者とも後者の値の最後の桁の 1 単位の精度で一致している．

5. おわりに

代用電荷法を適用して，与えられたいくつかの Jordan 閉曲線を境界とする多重連結領域から円弧スリット単位円板領域への数値等角写像の方法を提案した．

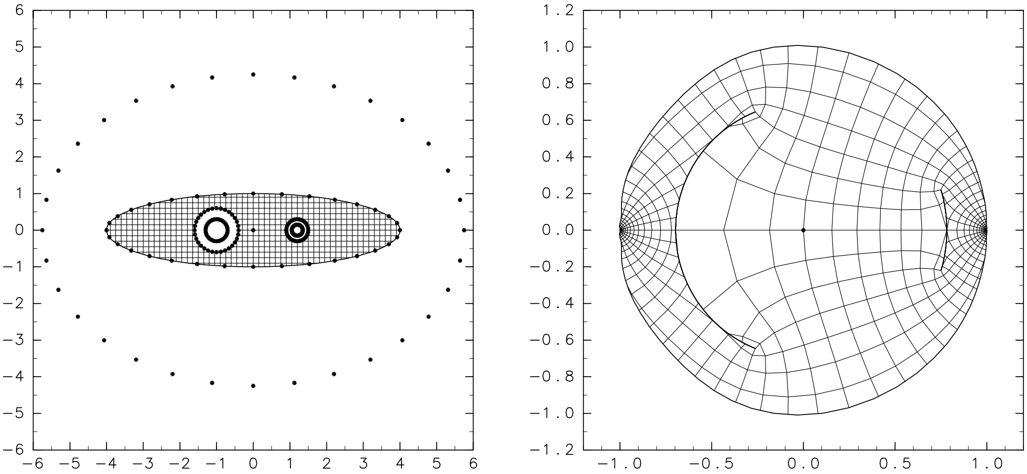


図 4 数値等角写像（例 2：$N = 32,\ q = 0.5$）
Fig. 4 Numerical conformal mapping of the domain with an elliptic and two circular boundary curves.

表 2 計算精度（例 2：$q = 0.5$）
Table 2 Numerical results for Example 2 ($q = 0.5$). N^* shows the case of ill-conditioning. The second lines of C_2 and C_3 ($N = 64$) are from comparison with $N = 128, q = 0.8$.

N		E_{Ml}	E_{Rl}	R_l	E_{RD}	R_D	$cond$
	C_1	2.7×10^{-02}	0.	1.			
16	C_2	7.8×10^{-06}	2.8×10^{-03}	0.785	7.5×10^{-03}	0.890	5.9×10^{03}
	C_3	9.9×10^{-04}	7.6×10^{-03}	0.705			
	C_1	1.4×10^{-02}	0.	1.			
32	C_2	1.3×10^{-10}	1.1×10^{-04}	0.7821	1.9×10^{-04}	0.8980	3.1×10^{06}
	C_3	9.9×10^{-06}	6.4×10^{-04}	0.6970			
	C_1	2.0×10^{-04}	0.	1.			
64	C_2	1.1×10^{-10}	4.2×10^{-07}	0.7822338	1.8×10^{-06}	0.897771	4.0×10^{11}
			9.0×10^{-08}	0.78223380	4.6×10^{-07}	0.8977714	
	C_3	1.6×10^{-09}	2.2×10^{-06}	0.697682			
			5.4×10^{-07}	0.6976823			
	C_1	6.1×10^{-05}	0.	1.			
128^*	C_2	4.7×10^{-05}					3.5×10^{19}
	C_3	3.5×10^{-05}					

また，その有効性を数値実験的に検証した．特に，ここでは複素対数関数に主値を採用して連続な近似写像関数の構成法を明示した．

数値等角写像の方法に関するこれまでの多くの研究は複素対数関数の数値計算に主値を採用した場合の連続な近似写像関数の構成法を明示していない．個々の問題領域に対して適当な計算規則を考え，これに基づく補正を行って連続性を保つことは可能である．しかし，そのような方法で自動的な補正を行うアルゴリズムの構成は必ずしも容易ではない．本論文においても，定式化 1 の近似写像関数の表現は簡潔である．しかし，主値を用いた計算の手順はかなり煩雑なものになる．このような意味で，連続な近似写像関数を明示的に与えることの意義は大きい．

なお，2.3 節で述べたような非有界な多重連結領域の場合には，双対な外部問題すなわち同心円弧状のスリットをともなう単位円板外部領域への等角写像も重要な問題である．その場合にも，本論文と同様な方法で主値を採用して連続な近似写像関数を構成することができる．

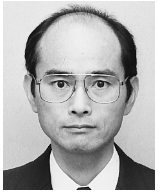
今後の研究課題として，前述の円弧スリット領域や円弧スリットをともなう円環領域への変換公式の実用性の検証等が考えられる．当然のことながら，残された標準領域すなわち円弧スリットをともなう円環領域への連続な近似写像関数の直接的な構成法も重要な課題である．

謝辞 本研究に有益なコメントを下さった杉原正顯教授（名古屋大学大学院工学研究科計算理工学専攻）および数値実験に協力して下さった岡本毅君（愛媛大学大学院理工学研究科情報工学専攻大学院博士前期課程）に感謝する．

参 考 文 献

1) 天野 要：代用電荷法に基づく数値等角写像の誤差の性質，情報処理学会論文誌，Vol.32, No.1, pp.1–10 (1991).
2) Amano, K.: A Charge Simulation Method for the Numerical Conformal Mapping of Interior, Exterior and Doubly-Connected Domains, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol.53, No.3, pp.353–370 (1994).
3) 天野 要：代用電荷法による数値等角写像の不変性，文部省科学研究費補助金総合研究（A）応用数学合同研究集会報告集，pp.71/1–4 (1994).
4) 天野 要：円弧スリット領域への数値等角写像の方法，情報処理学会論文誌，Vol.36, No.2, pp.219–225 (1995).
5) 天野 要：代用電荷法による放射スリット領域への数値等角写像の方法，日本応用数理学会論文誌，Vol.5, No.3, pp.267–280 (1995).
6) 天野 要，渋谷良彦，土江雅之，杉原正顯：代用電荷法による平行スリット領域への数値等角写像の方法，日本応用数理学会論文誌，Vol.6, No.4, pp.353–371 (1996).
7) 天野 要，井上哲男：代用電荷法による数値等角写像のスケール変換不変性，日本応用数理学会論文誌，Vol.8, No.1, pp.1–17 (1998).
8) Amano, K.: A Charge Simulation Method for Numerical Conformal Mapping onto Circular and Radial Slit Domains, *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol.19, No.4, pp.1169–1187 (1998).
9) Henrici, P.: *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol.3, John Wiley & Sons, New York (1986).
10) Hough, D.M. and Papamichael, N.: The Use of Splines and Singular Functions in an Integral Equation Method for Conformal Mapping, *Numer. Math.*, Vol.37, pp.133–147 (1981).
11) Hough, D.M. and Papamichael, N.: An Integral Equation Method for the Numerical Conformal Mapping of Interior, Exterior and Doubly-Connected Domains, *Numer. Math.*, Vol.41, pp.287–307 (1983).
12) 井上哲男，天野 要：数値内部等角写像のための代用電荷法における理論的な電荷点配置に基づく数値実験的研究，日本応用数理学会論文誌，Vol.7, No.4, pp.429–442 (1997).
13) 久原秀夫，米沢徹也：Neumann 関数と代用電荷法による等角写像，電気学会電磁界理論研究会資料，EMT-93-129, pp.1–10 (1993).
14) 久原秀夫，米沢徹也，小島俊輔：複連結領域の標準領域への等角写像の代用電荷法による構成，電気学会電磁界理論研究会資料，EMT-96-110, pp.67–77 (1996).
15) 久原秀夫，米沢徹也，安田和生：代用電荷法による多重連結領域の同心放射スリット円環領域への等角写像，電気学会電磁界理論研究会資料，EMT-97-83, pp.7–16 (1997).
16) Kythe, P.K.: *Computational Conformal Mapping*, Birkhaüser, Boston (1998).
17) Mayo, A.: Rapid Methods for the Conformal Mapping of Multiply Connected Regions, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol.14, No.1-2, pp.143–153 (1986).
18) Mikhlin, S.G.: *Integral Equations and Their Applications to Certain Problems in Mechanics, Mathematical Physics and Technology*, Second Revised Edition, Pergamon, Oxford (1964).
19) 村島定行：代用電荷法とその応用，森北出版，東京 (1983).
20) 室田一雄：代用電荷法におけるスキームの「不変性」について，情報処理学会論文誌，Vol.34, No.3, pp.533–535 (1993).
21) Nehari, Z.: *Conformal Mapping*, McGraw-Hill, New York (1952); Dover, New York (1975).
22) 岡本 久，桂田祐史：ポテンシャル問題の高速解法，応用数理，Vol.2, No.3, pp.2–20 (1992).
23) Reichel, L.: A Fast Method for Solving Certain Integral Equations of the First Kind with Application to Conformal Mapping, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol.14, No.1-2, pp.125–142 (1986).
24) Symm, G.T.: An Integral Equation Method in Conformal Mapping, *Numer. Math.*, Vol.9, pp.250–258 (1966).
25) Symm, G.T.: Numerical Mapping of Exterior Domains, *Numer. Math.*, Vol.10, pp.437–445 (1967).
26) Symm, G.T.: Conformal Mapping of Doubly-Connected Domains, *Numer. Math.*, Vol.13, pp.448–457 (1969).
27) Trefethen, L.N. (Ed.): *Numerical Conformal Mapping*, North-Holland, Amsterdam (1986); reprinted from *J. Comput. Appl. Math*, Vol.14, No.1-2 (1986).
28) Wen, G.-C.: *Conformal Mappings and Boundary Value Problems*, American Mathematical Society (1992).

(平成 11 年 9 月 27 日受付)
(平成 12 年 1 月 6 日採録)



天野　　要（正会員）

1948 年生．1971 年京都大学工学部電子工学科卒業．1978 年北海道大学大学院工学研究科博士課程電気工学専攻修了．工学博士．現在，愛媛大学工学部情報工学科教授，総合情報処理センター長．研究分野は数値解析を中心とする計算科学と情報科学．情報処理学会創立 30 周年記念論文賞，日本応用数理学会 1996 年度論文賞受賞．日本数学会，日本応用数理学会，電子情報通信学会，日本心理学会，SIAM，ACM 各会員．

岡野　　大（正会員）

1968 年生．1992 年東京大学工学部物理工学科卒業．1995 年東京大学大学院工学系研究科物理工学専攻修士課程修了．修士（工学）．現在，愛媛大学工学部情報工学科助手．研究分野は数値解析．日本応用数理学会会員．

緒方　秀教（正会員）

1967 年生．1990 年東京大学工学部物理工学科卒業．1992 年東京大学大学院工学系研究科物理工学専攻修士課程修了．博士（工学）．現在，愛媛大学工学部情報工学科講師．研究分野は数値解析．日本応用数理学会 1998 年度論文賞受賞．日本応用数理学会会員．