点で制約されている結び目の特性化について

7A−7

山田雅之　Rahmat Budiarto　伊藤英則　世木博久
名古屋工業大学

1. はじめに

ひもに関する研究は結び目理論[1,2]として盛んに行なわれており，また，様々な分野で応用されており，興味深い．

ここではひもと線分が存在する空間を考える(図1(a))．ひもは閉曲線，つまり辿ったとき，辿り始めた位置に戻るようなひも(結び目と呼ぶ)であるとする．この空間を平面に射影してできる図形(線分は点に射影される)を考える．交点をなす曲線に上下関係を与えて，これを交差点と呼ぶ．また，この図形を正則表示と呼ぶ(図1(b))．ここでは空間内の結び目と線分を正則表示で議論する．結び目の変形は点で制約されているとすることより，これを制約つき結び目と呼ぶことにする．

本論文では，J. Hoste と J.H. Przytycki によって提案された制約つき結び目の多項式不変量 $d(K)$ に基づき[3]，結び目の変形表現を示す．また 制約つき結び目から多項式を求めるプログラムについて述べる．

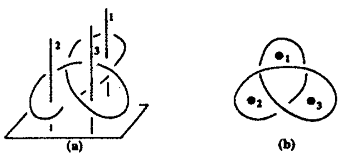


図 1: 対照とする空間 (a) 結び目と線分, (b) 正則表示

[結び目理論と諸準備]

二つの結び目 K と K' が空間内で位相同型であるとき，K と K' はアンビエントアイソトピック (ambient isotopic) であるという．アンビエントアイソトピックである二つの結び目の共通の性質を不変量を呼ぶ[2]．次に交差点符号和 $w(K)$ を次式で定義する．

$$w(K) = \sum_{p \in Cr[K]} \epsilon(p)$$

$Cr[K]$ は正則表示 K の交差点の集合である．$\epsilon(p)$ について説明する．まず，結び目に向きを与える(図2(a))．向きのついた結び目の交差点は図2(b), (c) のどちらかに対応する．交差点 p ($p \in Cr[K]$) が図2(b) に対応するなら $\epsilon(p) = 1$ とし，(c) に対応するなら $\epsilon(p) = -1$ とする．交点符合和 $w(K)$ は K の交差点に関する $\epsilon(p)$ の総和となる．

本論文では，Hoste らが提案した制約つき結び目の多項式不変量 $d(K)$[3] を拡張した形で定義する．この拡張により，正則表示に複数の点が存在する制約つき結び目の多項式不変量を求めることができる．$d(K)$ は次式で与えられる．

$$d(K) = (-A^3)^{-w(K)} < K >.$$

ここで，K は正則表示であり，$< K >$ は以下の五つの式で与えられる量である．

1. $< \cdot \bigcirc >= 1$,
2. $<\odot>= h_\alpha$,
3. $< \; >= A < \; > + A^{-1} < \; >$,
4. $< \cdot \bigcirc K >= -(A^2 + A^{-2}) < \cdot\ K >$, $K \neq \phi$,
5. $<\odot K >= -(A^2 + A^{-2})h_\alpha < \cdot_\alpha K >$, $K \neq \phi$,

ここで，○は交差点のない結び目(自明結び目)の正則表示であり，⊙は点の集合 α を含む自明結び目の正則表示である．α の要素が i, j, k のとき h_α を $h_{i,j,k}$ と書くこともある．3の操作を平滑化と呼ぶ．$< \; >$, $< \; >$, $< \; >$ は <> 内の部分のみ異なっていて，それ以外はそれぞれ他の2つの <> と同一の正則表示を表す．各交差点を平滑化してできる正則表示をステイトと呼ぶ．

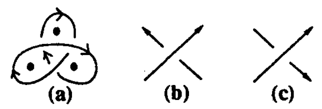


図 2: 向きのついた結び目の交差点 (a) 結び目の向き, (b) $\epsilon(p) = 1$, (c) $\epsilon(p) = -1$

2. 変形の表現

$d(K)$ を用いた制約つき結び目の代表的な変形表現について述べる．

[定理 1](点削除) 正則表示 K から点 j を取り除いたときの多項式を $\Delta^j d(K)$ とする．$\Delta^j d(K)$ は $d(K)$ に以下の操作をすることにより得られる．

• h_j に1を代入し，かつ，$h_{i,j,k\ldots}$ を $h_{i,k\ldots}$ に置き換える．(証略)

[定理 2](ねじり) ねじりをつくる変形に関して次式が成り立つ．

$$d(\;) = (1 + A^{-4})h_i\Delta^i d(\;) - A^{-4}d(\;) \quad (a)$$
$$d(\;) = (1 + A^{4})h_i\Delta^i d(\;) - A^{4}d(\;) \quad (b)$$

[証明] (a) を示す．なお，同様に (b) も示すことができる．

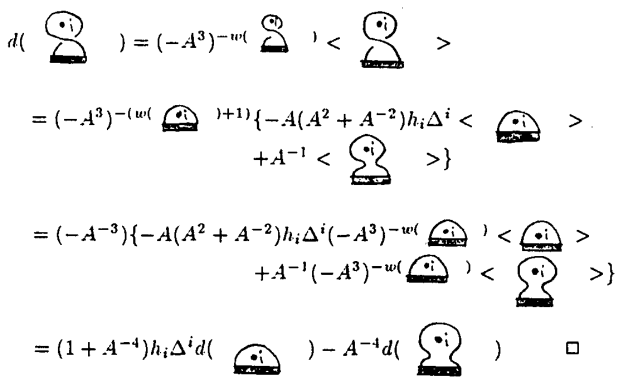
$$< \; >= A < \; > + A^{-1} < \; >$$
$$= -A(A^2 + A^{-2})h_i < \; > + A^{-1} < \; >$$

定理1より →

$$= -A(A^2 + A^{-2})h_i\Delta^i < \; > + A^{-1} < \; >$$

また，$w(\;) = w(\;) + 1$ であることから

A Method of Characterization for Constrainted Knot with Point
Masashi Yamada, Rahmat Budiarto, Hidenori Itoh, Hirohisa Seki
Nagoya Institute of Technology



[補題 3](連結可能形) 図 3(a) の K_a に対応する制約つき結び目 K の多項式は次式の形になる．

$$d(K) = (-A^3)^{-w(K)} \sum_i X_i h_{p_a,\alpha_i} < K_i >$$

ここで，$X_i = A^{c_i}$，c_i は整数．但し，p_a は $< K_i >$ を表す h の添字にはならない．つまり各項に p_a を添字とする h はただ一つである．また α_i は K のステイトにおいて点 p_a と同一の領域に存在する点の集合を表す．（証略）

[定理 4](連結) 図 3(b) のように K_a と K_b を連結して得られる制約つき結び目 $K_a\#K_b$ の多項式 $d(K_a\#K_b)$ は次式で与えられる．

$$d(K_a\#K_b) = (-A^3)^{-(w(K_a)+w(K_b))}$$
$$\times \sum_{i,j} X_{a_i} X_{b_j} h_{p_a,p_b,\alpha_{a_i},\alpha_{b_j}} < K_{a_i} >< K_{b_j} >$$

但し，$d(K_a) = (-A^3)^{-w(K_a)} \sum_i X_{a_i} h_{p_a,\alpha_{a_i}} < K_{a_i} >$，
$d(K_b) = (-A^3)^{-w(K_b)} \sum_i X_{b_j} h_{p_b,\alpha_{b_j}} < K_{b_j} >$ （証略）

図 3：連結 (a)K_a, K_b , (b)$K_a\#K_b$

3. 多項式への変換プログラムのための表現法

制約つき結び目の多項式を求めるためのプログラムについて述べる．点のないときの結び目の多項式を求めるプログラムはすでに存在する[5]．制約つき結び目の多項式は，次に説明する「領域方向グラフ」を用いて求めることができる．

[制約つき結び目のグラフ表現]: 制約つき結び目を以下に示す「黒領域グラフ $G(K)$[2]」と「領域方向グラフ $H(K)$」により表現し，これらをプログラムの入力とする．

$G(K)$ と $H(K)$ のノードを以下の 1 〜 2 の手順で作る。

1. 正則表示の領域を二色 (黒，白) で彩色する．但し，外側の領域 E(図 5(a)) は白とし，また，正則表示の同一の辺を共有し合う領域は互いに異なる色とする．

2. 黒または白に彩色された領域に，それぞれ黒領域ノード■，白領域ノード□を置く。但し，黒に彩色された領域に点 α が存在するとき、その領域のノードを $■_\alpha$ で表す．白に彩色された領域のノードも同様とする。

- 黒領域グラフ $G(K)$ は以下の手順で得られる[2](図 5(a)).

1. 黒領域ノード間を正則表示の交差点を通るエッジで結ぶ．さらに，交差点を通るエッジが図 4(a) に対応する場合，そのエッジにラベル a をつけ，図 4(b) に対応する場合ラベル b をつける．

- 領域方向グラフ $H(K)$ は以下の 1 〜 3 の手順で得られる (図 5(b)).

1. 外側の領域 E にあるノードから，辺を共有し合う領域のノードに入力するエッジをひく．

2. エッジが入力されたそれぞれのノードから，辺を共有し合う領域のノードに入力するエッジをひく．但し，すでにエッジで結ばれているノードにはエッジをひかない．

3. 全てのノードにエッジが入力されるまで 2 を繰り返す．

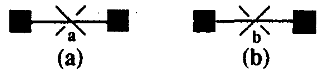


図 4：エッジのラベル (a) ラベル a, (b) ラベル b

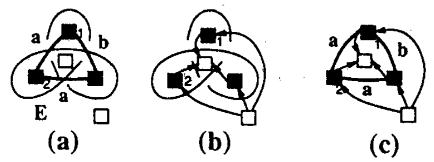
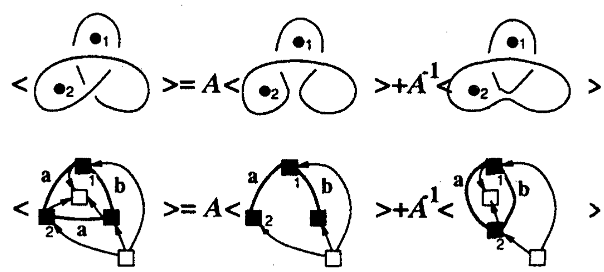


図 5：グラフ表現 (a) $G(K)$, (b) $H(K)$, (c) 入力
(■黒領域ノード, □白領域ノード)

[グラフ変形処理]: 平滑化に対応するグラフ変形は，エッジのラベルと方向の組合せにより 8 個ある．ここではその一つを例で示す．



参考文献

[1] 河内 明夫, 結び目理論, シュプリンガー・フェアラーク東京 (株)(1990).

[2] L.H. Kauffman, On Knots, Annals of Mathematics Studies, Vol. 155 (Princeton Univ. Press, Princeton, 1987).

[3] J. Hoste and J.H. Przytycki, AN INVARIANT OF DICHROMATIC LINKS, Pro. Am. Math. Soc. Vol 105, Num 4 (1989) 1003-1007.

[4] Y. Miyazawa, SYMMERY OF DICHROMAIC LINKS, Pro. Am. Math. Soc. Vol 114, Num 4 (1992) 1087-1096.

[5] 落合豊行 山田修司, 結び目の分類と三次元多様体, 数学研究へのコンピューターの影響, 別冊・数学セミナー, 日本評論社 (1986)

[6] V.F.R. Jones, A polynomial invariant for links via von Neumann algebras, Bull. Am. Math. Soc. 12 (1985) 103-111.

[7] L.H. Kauffman, STATE MODELS AND THE JONES POLYNOMIAL, Topology, Vol 26, Num 3 (1987) pp.395-407