9K−8

紙の折れ目の力学的モデル

後藤田 洋伸, 國井 利泰
東京大学理学部情報科学科

1 はじめに

紙は伸び縮みしないという性質を持っている。この性質ゆえに、紙を曲げて得られる曲面は、クシャクシャにしたり破ったりすることなく平面の上に展開することができる。幾何学の用語では、このことを「紙を曲げてできる曲面は可展面 (developable surface) である」という。本論文では、可展面の折り曲げについて述べる。

CAD や CG における可展面の重要性は、すでに Huffman によって指摘されている [4]。Huffman は可展面を、多面体曲面 (polyhedral surface) と完全に一般的な曲面との中間に位置付けた。これは可展面の持つ次の性質に着目した結果である。

- 可展面は線織面 (ruled surface) の一種である。つまり、可展面は線分 (generator と呼ぶ) を張ることによって得られる。しかも線分上の任意の点において接平面が同じである。

多面体曲面は、構成要素が多角形という平面図形であるため、上記の性質を満たすことは明らかである。この意味で可展面は多面体曲面の一般化になっているということができる。一方、任意の曲面に対してはこのような都合の良い性質は期待できない。従って、可展面は多面体曲面よりも広いクラスの曲面を表現することができ、一方では一般の曲面よりも扱い勝手がよいものと見ることができる。

Huffman 以降、可展面に関する研究いくらかの進展はみたものの、それらは主に可展面の表現に関することに留まっており、折り曲げる過程を具体的に計算機で計算する方法については全く研究がなされてきていない。本論文で提案するのはこうした方法についてである。金属、木材、皮、さらには織物やプラスチックも近似的には伸び縮みしない材質であるとみなすことができる。従ってこうした材質からできた薄いシート、例えば衣服などの力学的振舞いを調べるときにも、可展面の折り曲げに関する知識を応用することができる。

2 過去の研究例

可展面の幾何学的性質については、標準的な微分幾何学の本に紹介されている [2][3]。Huffman は可展面の折れ目付近の幾何的性質について、簡単な計算を行なった [4]。可展面の CAD への応用については、Redont によってなされているものなどがある [6][8]。これらは主に、可展面の表現に関する研究である。

折り紙は可展面の一種であるとみなすことができる。Agui 等は折り紙のアニメーションを行なう方法について述べた [1]。そこでは極めて限られた種類の折り曲げについて述べているが、可展面の持つ数学的な簡明さに比べ、提案された方法は複雑なものになってしまっている。しかも本質的に多面体曲面しか扱うことができない。

ここで取り扱うのは力を加えたときに可展面がどう振舞うかということである。こうした力学的な振舞いについては、一般の曲面に対する研究の方が先行している。Terzopoulos 等は、弾性をもつ曲面、すなわち伸び縮みする材質でできた曲面を変形する方法について提案した [7]。この方法は織物のような物質に応用する際には数多くの問題を残しているものの、現在広く知られている方法である。繊維のシミュレーションを行なう方法は、これ以外にも提案されている。([5] にそのサーベイがある。)

Terzopoulos 等の方法では、紙の「伸び縮みしない」という性質を、非常に大きな力学係数を持つバネを用いて表す。その結果「硬い」微分方程式を解かなければならなくなる。また「折れ曲がり」を曲率の急激な変化として表現するので、こうした変化を実際に可能にするためには非線形なファクターを導入せねばならず、計算速度を著しく低下させる。

可展面という特定の曲面に対しては、弾性体の一般論ではなく、もう少し幾何的な特徴を生かしたモデルが望まれる。以下の節では、可展面の折り曲げ問題を幾何的に解決する方法を提案する。

3 折れ目のない可展面のモデリング

折れ目のない可展面の形状は、輪郭線の形状与えるだけで内部まで完全に決まってしまう。このことをまず最初に見ておこう。可展面は線織面の一種であるから、輪郭線の形状と generator の方向を決めてやれば全体の形状が決まるということは明らかである。この generator の方向は、実は輪郭線の形状によって完全に決まってしまうのである。これについての詳しい説明は微分幾何の教科書に書かれている [2]。

折れ目のない可展面の形状を表現するには、輪郭線の形状を表現すればいい。ここで注意しなければならないのは、任意の形状の閉曲線に対して、それを輪郭線に持つような可展面が存在するということではない、ということである。閉曲線の取り得る形状の全体から成る空間を X と書こう。可展面の輪郭線に成り得る閉曲線の全体から成る空間は、X の部分空間である。この空間を Y と書こう。可展面に力を加えて曲げると、輪郭線も変化する。その変化は Y の中での変化である。物理法則によれば、こうした変化はエネルギーを極小化する方向に起こる。こうした状況は、古典的な「制約条件の下での最適化」そのものであり、例えば射影法などで解くことができる。残る問題はいかに制約条件を表現するかということである。

制約条件の表現は簡単である。可展面の折り曲げは、伸び縮みを許さない (計量を保つ) ものである。従って制約条件としては計量を保つことさえ記述すれば十分である。計量はベクトルの内積によって決まる。二つのベクトル v と w の内積を $< v, w >$

A Dynamic Model of Paper Folding
Hironobu Gotoda and Tosiyasu L. Kunii
Department of Information Science, Faculty of Science, The University of Tokyo

と表すことにすると、内積の変化は$< dv, w > + < v, dw >$である。この変化が0になるというのが、計量を保つことに他ならない。

4 可展面の折れ目のモデリング

次に折れ目を持つ可展面の形状の表現を考える。前節と同様の議論により、輪郭線の形状と折れ目の線 (folding curve と呼ぶ) の形状を決めてやれば、可展面全体の形状が表現できるということは自明である。従ってこうした曲線の組によって可展面を表現する。折れ目がどのようにしてできるのかを考察するために、可展面全体を小さな領域に分割し、各領域は高々一つの folding curve しか内部に持てないものとしよう。このような分割は常に可能である。こうした分割により、折れ目の問題を領域ごとに議論することができる。以下では折れ目を持たない領域が、一つの折れ目を持つようになる過程について述べる。

前節で、折れ目のない領域を曲げる方法について述べた。それは本質的には空間Yの上で最適化を行なうことであった。Yは計量を保つという制約条件のみによって決まる。しかしこの条件は輪郭線の近傍でのみ評価されるものであるから、結果として得られる曲面が自己交差を持つこともあり得る。例えば、図1のような輪郭線形状に対しては、輪郭線から離れたところで自己交差が生じる。輪郭線付近では可展面であるが、全体としては可展面ではないのである。 この問題を解決する方法として次の二つのアプローチがある。一つは自己交差が生じないように空間Yを制限してしまうことである。これは折れ目を全く許さないことに相当する。もう一つは、folding curve を導入して自己交差を解消することである。これは、自己交差を生じるような輪郭線の形状をほんのわずか変形することによって、折れ目を持つ可展面の輪郭線にすることができる、という事実に基づいている。我々はこのアプローチをとる。

Folding curve の形状は可展面のエネルギーを最小にするようなものが望ましい。しかしこれをいきなり達成するのは困難なので、まず一点に潰れた曲線から始め、順次これを成長させていく。エネルギーが最小になるように一点を置くのは簡単である。点の位置を決めた後、それを微小な曲線に置き換え、よりエネルギーが小さくなる形状を探す。新たな曲線を導入したことで、境界の取り得る形状の自由度も増す。つまり空間Yよりもより次元の大きな空間$\tilde{Y}$を考えることになる。$\tilde{Y}$上での最適化は、Yのときと全く同じである。図2にこの方法で計算した可展面の折り曲げの例を示す。

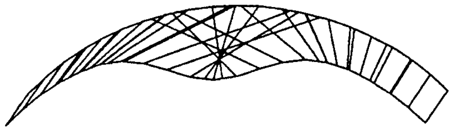

図 1: 自己交差を持つ輪郭線

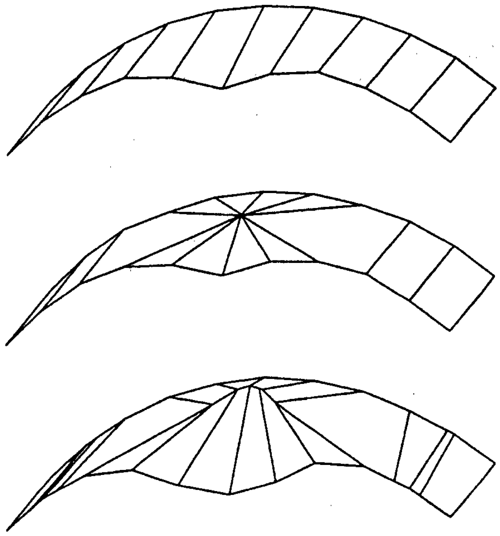

図 2: 可展面の折り曲げ

5 まとめと今後の課題

可展面を折り曲げる方法を提案し、その方法を用いて折り曲げる過程を実際に計算してみた。この方法の基軸となるのは、可展面の持つ簡単な幾何学的性質に着目して空間Yを構成すること、および折れ目ができていくのに応じて空間Yを拡張していくこと、の二点である。

今後の課題としては次の二つの点がある。複雑な形状になればなるほど空間Yの次元は大きくなる。そこで第一の課題としては、大きな次元を持つ空間上での最適化を効率的に実行する方法を見つける、ということが挙げられる。もう一つの課題は、紙以外の材質 (例えば繊維) でできた曲面に対しても使えるように、本論文の方法を拡張することである。

参考文献

[1] T. Agui, M. Takeda, and M. Nakajima. Animating planar folds by computer. *Comput. Vision, Graphics and Image Process.*, 24:244–254, November 1983.

[2] M. P. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Prentice-Hall, 1976.

[3] D. Hilbert and S. Cohn-Vossen. *Geometry and the Imagination.* Chelsea, New York, 1952.

[4] D. A. Huffman. Curvature and creases: a primer on paper. *IEEE Trans. Computers*, C-25:1010–1019, 1976.

[5] Nadia Magnenat-Thalmann and Daniel Thalmann. Complex models for animating synthetic actors. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 11(5):32–44, September 1991.

[6] P. Redont. Representation and deformation of developable surfaces. *Computer Aided Design*, 21(1):13–20, 1989.

[7] Demetri Terzopoulos, John Platt, Alan Barr, and Kurt Fleischer. Elastically deformable models. *Computer Graphics (SIGGRAPH '87 Proceedings)*, 21(4):205–214, 1987.

[8] Gunter Weiss and Peter Furtner. Computer-aided treatment of developable surfaces. *Computers and Graphics*, 12(1):39–51, 1988.