旅の案内図の抽象モデル化

5K−5

三吉 佐枝子　國井 利泰　品川 嘉久
東京大学

1 はじめに

古来からどこの旅の案内書にも普遍的に出てくる案内図は、例えば山地の場合で言えば山の頂上、山越えのための峠、美しい湖などが描かれ、そこをどう巡るかを示している。（例えば図1。）このような図は旅して歩いた時の特徴的な場所を取り上げて記述しており、決して一視点からの遠近法による投影図ではない。例えば、あちこち旅した時に到達した地点からの眺めが図のそれぞれの所に描かれるなど多視点になっている。山頂にはピーク（極大点）が少なくとも一つあり、湖はピット（極小点）に水がたまったもので、ピットは少なくとも一つある。ここでは、最も単純な場合として、山頂、湖にピークとピットがそれぞれ一つの場合を例にとる。このような図を数学的に厳密な図に構成する方法は今まで知られていなかった。その原因はこれらの旅行案内図を抽象してモデル化することが行なわれていなかったからである。そこで本研究では旅行案内図の抽象モデル化を行なう。まず多視点で描かれた図を多様体を用いてモデル化する。次に山頂、湖、峠の関係をモース理論 [1] で特徴付け、特徴点グラフ [2][3] として表現する。これは案内図の特徴を、コンピュータ通信する時のモデルに基づくデータ圧縮にも応用できる。また、この研究を応用すれば、今までは人が手で描いていた案内図を地形図から自動生成することも可能となる。

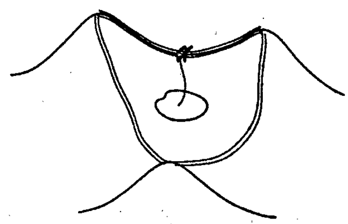

図 1: 案内図の例

2 案内図の作成過程に対する考察

旅の案内図の元となっている地表面を、２次元可微分多様体と考え、これを M とする（図2）．案内図の作者は M 上の点 v をある視点 $p \in R^3$ から眺めてそれを案内図に描く。案内図の特徴は先程述べたように場所毎に視点が変わる多視点の絵になっているということである。（例えば、山の概形は横方向から描かれ、湖は上方から描かれる。）従って p は v によって決まると考えられ、この写像を f とする。M 上の点 v に対応する点 x を案内図 $N(\subset R^2)$ に描き入れる時、視平面 S が固定されており、視点 p と v を結ぶ視線が S と交わった点 v' の座標を適当な座標変換で N 上の点 x と対応させているものとする。S が平面の場合は S をそのまま N と同一視すれば良いし、S を曲面としてもよい。ここでは簡単のため、$S = N$ としておく。

すると案内図の生成過程を次のような写像 Π として定式化できる。

$$\begin{aligned}\Pi : M &\rightarrow N \\ v &\mapsto x\end{aligned}$$

但し、視点 $p = f(v)$ と M 上の点 v を結ぶ視線が S と交わる点 x を $\Pi(v)$ と定義する。

ここで、この写像 Π を２つの場合に分けて考える。

- （１）Π は連続であり、まとまった構成要素（湖・山など）に対しては視点が一定である場合。
- （２）Π は視点が一定ではなく微分可能であるように変化する場合。

案内図の生成が行なわれている時、写像 Π はこれらを満たしているものと考えられる。Π が連続（または可微分）であるためには視点を決定する写像 f に強い制約を課す必要がある。次節ではそのような f を実際に構成して、そのとき Π が連続（または可微分）となることを示す。

ここで R^3 内に M と視平面 S があるとし、M と S は交わらないとする。もとの座標系の原点を O とする。S 上に x 軸 y 軸をおいた新しい座標系を置き、原点を O' とする。新しい方の座標表示は $'$ を付けて表すことにする。（図2）この時任意の R^3 の点 (x, y, z) とそれを新しい座標系で表現した (x', y', z') との間には次の関係がある。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x - O'_x \\ y - O'_y \\ z - O'_z \end{pmatrix}$$

（R は適当な回転＋拡大（縮小）行列）
f（視点）が決まれば M の任意の点 v における Π の像 w は単なる投影となるので、

$$\begin{cases} w_{x'} = \frac{z'}{z' - p_{z'}} \cdot (x' - p_{x'}) \\ w_{y'} = \frac{z'}{z' - p_{z'}} \cdot (y' - p_{y'}) \end{cases} \tag{1}$$

となる。式 (1) に現れる、p は次節で定める連続（または可微分）写像 f で決まるので（$p = f(v)$）、式 (1) により Π も連続（または可微分）になる。

3 f の構成法

C^r 級多様体 M（r は自然数または∞）に有限個の n 個の孤立した点 $v_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ を考える。各 v_i における f の像 $p \in R^3$ を決めておく。

v_i を含み、$v_{j(\neq i)}$ を含まないような開近傍 U_i について $M = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ となるように各 U_i をとることが可能である。

A Model for a Guide Map
Saeko Miyoshi, Tosiyasu L. Kunii, and Yoshihisa Sinagawa
The University of Tokyo

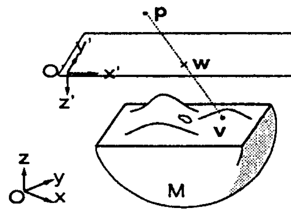

図 2: 視点と地表面

（1） Π を連続とし 構成要素の範囲内では視点を一点に定める場合。

M 上の 任意の 点 v について $\Lambda_v = \{i \mid v \in U_i\}$ とする。（但し、 $v \in M$ より、 $|\Lambda_v| \geq 1$ が成立する。）

先程の U_i が、 $|\Lambda_v| \leq 3$ を満たすようにとれていたと仮定する。

$|\Lambda_v| = 1$ のときは、 v に対する f の像は先に定めた v_i （但し $v \in U_i$ ）での像 p とする。

$|\Lambda_v| = 2$ のときは以下のように定める。

v の近傍（または連続写像でいける）の点 x で、 $|\Lambda_x| = 2$ を満たしているような x の集合を X とする。 X は図 3の長方形の領域 と同相である。この時の同相写像を φ とする。長方形の辺 a, b 上での視点写像 f を p_A, p_B （点 A, B における f の像） と定め、長方形の内部での像は線形補間によって求める。そして、 φ によって引き戻して、 X 上での視点写像を決定する。このとき、 X 内では明らかに連続である。また $|\Lambda_x| = 1$ の部分との境界上（辺 a, b に対応する部分）でも連続である。

$|\Lambda_v| = 3$ のときは以下のようにする。

Y を先ほどの X と同様にして定義する。今度は Y は開集合である。図 3における点 D, E, F を正三角形の頂点に対応させる Y から正三角形への同相写像 ϕ を考える。点 D, E, F 上での視点写像の像を p_A, p_B, p_C として、三角形の内部での像は線形補間によって求める。この時、内部で視点写像は連続である。また、辺上（辺 DF など）でも連続となるように、 ϕ をとっておくことができる。

さてこのようにして f を定めると、その作り方より領域内部でも境界上でも連続なので、式 (1) により Π も連続となる。

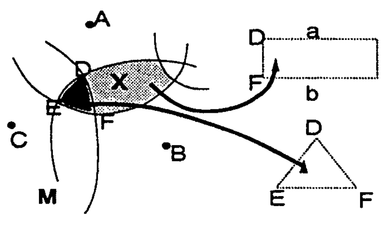

図 3: f の構成法（（1）の場合）

（2） Π は視点が一定でなく微分可能であるように変化する場合。

各代表点での Π の像 v_i を定めておくところまでは（1）と同じだが、これらは制御点として用いる。 M の任意の点における像は rational gaussian surfaces 法 [4] により定める。
すると f は M 上の C^r 級写像となり、式 (1) により Π はやはり可微分となる。

4 案内図の抽象化

2節と3節では地形から案内図が生成される過程を連続（または可微分）な写像 Π として定式化した。この節では逆に案内図から元の地形を復元し、特徴点グラフとして符合化することを考える。案内図を復元する過程は Π の逆写像 $\Pi^{-1} : N \to M$ で説明される。従って案内図の各部分によってそれを描いた時の視点の位置が f に従って変化する。Π の定義から案内図を局所的にみると、ある視点から地形を見た時の投影図となっているので、その部分の局所的な高さ関数の概形を推定することが可能となる。さらに Π の連続性（または可微分性）から局所的に推定された高さ関数同士をなめらかに接続することが必要となり、3節でのべた f の構成法と同様の手法を適用できる。

旅行用の案内図には通常、地形の他に山や湖の名前や、温泉や宿泊施設の名なども示されており、そのまま扱うのは困難である。そこで図の中に示される情報を山頂の位置、峠の位置、湖の位置、尾根線、谷線（これらの定義は文献 [2] による。）といった純粋に地形を表現しているものに限る。（図 1に案内図の例を挙げる。）これらの要素は特徴点グラフ [2][3] の点と枝に対応している。そこで、抽象化を次のように行なう。

Step 1 山頂点・峠点・尾根線などを全て検出し、グラフを作成する。

Step 2 特徴点を中心とした小領域に案内図を分割する。

Step 3 小領域毎にその範囲内での高さ関数と視点（関数）を推定する。

Step 4 グラフの点同士の接続関係に基づいて、Step 3 でつくった高さ関数同士をなめらかに接続する。（3節でのべた f の構成法を適用。）

Step 5 完成された高さ関数を特徴点グラフに基づき、符合化する。（グラフ文法 [3] などを用いる。）

5 応用

今回は案内図の抽象化を扱ったが、逆に等高線図などの地形図を与えて、案内図を自動生成することも考えられる。

参考文献

[1] H. B. Griffiths. *Surfaces(2nd ed.)*. Cambridge University Press, 1981.

[2] L. R. Nackman. Two-dimensional critical point configuration graphs. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(4):442–450, July 1984.

[3] J. L. Pfalz. A graph grammar that describes the set of two-dimensional surface networks. In V. Claus, H. Ehrig, and G. Rozenberg, editors, *Graph-Grammars and Their Application to Computer Science and Biology (Lecture Notes in Computer Science)*, pages 379–388. Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[4] A. Goshtasby. Design and recovery of 2-d and 3-d shapes using rational gaussian curves and surfaces. Private Communication, and to appear in *the International Journal of Computer Vision*, 1993.