ジャンプナンバー問題の ニューラルネットワークを用いた解法について

4D−6

小田原育也，成嶋弘，峯崎俊哉

東海大学

1．はじめに

Hopfieldらの示した巡回セールスマン問題[1]（ＴＳＰ)をはじめとして、ニューラルネットワークの組合せ最適化問題への応用が多数試みられている。

本稿では、順序集合論におけるNP-complete問題の一つであるジャンプナンバー問題[2]（ＪＮＰ)への応用を試みる。なお、ＪＮＰはＣＡＩ(Computer Assisted Instruction: 計算機支援教育)における教授順序の最適性に関する問題にも関連している[3]。

初めに、順序集合とジャンプナンバー問題に関する定義及び具体例を示した後、ＪＮＰの近似解をHopfieldネットワークによって得るための表現図式(解の表現)と定理を提案する。また、その有効性を示すため、バイナリーニューロンを用いたHopfieldネットワークによるシミュレーション実験を行い、その結果について考察する。

2．ジャンプナンバー問題とは

2．1 用語の定義

集合P上の二項関係が反射的、反対称的かつ推移的であるとき、この二項関係を順序(partial order)と呼び、≦で表す。以下、集合Pは有限集合とし、その要素数をnとする。順序集合(partially ordered set, poset)とは、集合PとP上の二項関係≦から構成され、通常$(P, \leq)$で表される。以下、混乱のない限り単にPと書く。$x, y \in P$に対して$x \leq y$でも$y \leq x$でもないときxとyは比較不可能(incomparable)であるといい、$x \parallel y$で表す。また$x \leq y$かつ$x \neq y$のとき$x < y$と書く。さらにPで$x < y$かつ$x \leq z \leq y$なるPの元zがx, y以外に存在しないとき、xはyの直前の元、yはxの直後の元と呼ばれ、$x \uparrow y$で表される。$(P, \uparrow)$の表現グラフをハッセ図(Hasse diagram)と呼び、$H(P)$で表す。P上の関係↑は被覆関係(covering relation)とも呼ばれ、$H(P)$はPの被覆グラフとも呼ばれる。順序集合Pの要素に通し番号を付け$P = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$とする。このとき$H(P)$に対して、行列$M = (m_{ij})$を次のように定義し、$H(P)$の結合行列と呼ぶ。

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & (p_i, p_j) \in E \\ 0 & (p_i, p_j) \notin E \end{cases}$$

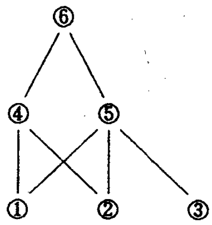
ただし、Eは$H(P)$の辺集合を表す。

Pの線形拡大$(P, \leq_e)$とは、$\leq_e$がPの線形順序で、$x \leq y \Rightarrow x \leq_e y$を満たすものをいう。通常$t_1 \leq_e t_2 \leq_e \cdots \leq_e t_n$の様に書くが、単に$t_1 t_2 \cdots t_n$と書く。$P$の線形拡大$T = t_1 t_2 \cdots t_n$において、対$(t_i, t_{i+1})$ $(1 \leq i \leq n-1)$がジャンプであるとは、$t_i \not< t_{i+1}$のとき、すなわち$t_i \parallel t_{i+1}$のときをいう。Pの線形拡大Tのジャンプ数を$s(P, T)$とするとき、Pのジャンプ数$s(P)$はPの線形拡大のうちジャンプ数が最小のもののジャンプ数、すなわち$s(P) = min\{s(P, T) \mid T$は$P$の線形拡大$\}$である。

ジャンプナンバー問題(ＪＮＰ)とは順序集合Pに対して、$s(P)$を求めることである。

2．2 具体例

集合$P = \{①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥\}$に対して、次のようなハッセ図で表される順序が与えられているものとする。



$H(P)$

	①	②	③	④	⑤	⑥
①	0	0	0	1	1	0
②	0	0	0	1	1	0
③	0	0	0	0	1	0
④	0	0	0	0	0	1
⑤	0	0	0	0	0	1
⑥	0	0	0	0	0	0

結合行列M

このとき、Pの線形拡大は次の14通りであり、Pのジャンプ数$s(P)$は２である。なお、右の数字はジャンプ数である。

①②③④⑤⑥	4	②①④③⑤⑥	2
①②③⑤④⑥	3	②③①④⑤⑥	3
①②④③⑤⑥	2	②③①⑤④⑥	3
①③②④⑤⑥	3	③①②④⑤⑥	3
①③②⑤④⑥	3	③①②⑤④⑥	3
②①③④⑤⑥	4	③②①④⑤⑥	3
②①③⑤④⑥	3	③②①⑤④⑥	3

3．ＪＮＰ計算ネットワーク

3．1 解の表現と定理

本稿で提案するニューラルネットワークでは、Pの要素数をnとすると、二次元行列Vで表される$n \times n$個のニューロンを用いて解を表現する。ここで、各行はPの各要素を、各列はそれぞれの要素が線形順序の何番目であるかを表す。

例えば、$P = \{①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥\}$に対して、Pの線形順序$T = ②①④③⑤⑥$を行列Vで表すと次のようになる。

$V =$

	1	2	3	4	5	6
①	0	1	0	0	0	0
②	1	0	0	0	0	0
③	0	0	0	1	0	0
④	0	0	1	0	0	0
⑤	0	0	0	0	1	0
⑥	0	0	0	0	0	1

A neural network approach for the jump number problem
Ikuya ODAHARA, Hiroshi NARUSHIMA, Toshiya MINEZAKI
Tokai University

ニューラルネットワークの線形拡大への制約として、次の定理を提案する。

定理　P:要素数nの順序集合,M:結合行列,$\overline{M}$:Mの0と1を反転した行列,V:線形順序を表す行列に対して、TがPの線形拡大であり、かつTのジャンプ数$s(P,T)$が最小のとき、かつそのときのみ、

$$N\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} m_{lk}v_{ki}v_{lj}+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\overline{m}_{kl}v_{ki}v_{l,i+1}$$

が最小となる。ただし、$N \geqq n$とする。

3．2　動作表現

各ニューロンの内部状態U_{ki}と出力V_{ki}の関係は次のように定義する。

$$V_{ki}=\begin{cases}1 & U_{ki}\geqq 0\\ 0 & U_{ki}<0\end{cases}$$

各ニューロンの内部状態U_{ki}は次式で得られる。

$$U_{ki}=-A\left(\sum_{j\neq i}^{n}V_{kj}+\sum_{l\neq k}^{n}V_{li}\right)-B\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}V_{kj}-N'\right)$$

$$-C\sum_{l\neq 1}^{n}\left(Nm_{lk}V_{lj}f(j,i)+\overline{m}_{kl}V_{l,i+1}\right)$$

ただし、$V_{l,n+1}=0$とし、関数$f(i,j)$は次のように定義する。

$$f(i,j)=\begin{cases}1 & i>j\\ 0 & i\leqq j\end{cases}$$

また、$A,B,C,N',N(\geqq n)$は正定数とする。

第1項及び第2項はHopfieldのＴＳＰと同じもので、ＪＮＰではPのすべての要素を必ず一度だけ選択する、すなわち線形順序を指向するという制約を表す。第3項は、先に提案した定理を用いた項で、ジャンプ数最小の線形拡大を指向するという制約を表す。

4．シミュレーション実験

4．1　計算アルゴリズム

計算機によってシミュレーションを行う場合の手順を以下に示す。

①Pの要素数n及び結合行列Mを入力する。
②各パラメータA,B,C,N',Nにより、ニューロン間の結合の強さを表す行列W及び入力バイアスIを計算する。
③ニューロンの出力Vの初期値を設定する。
④任意のニューロンを一つ選ぶ。
⑤手順④のニューロンの内部状態を算出する。
⑥手順④⑤をVが線形順序となるか打切り回数まで繰り返す。
⑦Vが線形拡大に収束したときはその結果を出力する。
⑧手順③④⑤⑥⑦を指定回数だけ繰り返す。
⑨得られた線形拡大のうちジャンプ数が最小のものをＪＮＰの解とする。

以下、手順④～⑤をステップ、手順③～⑦を試行と呼ぶ。なお、手順⑥のステップ打ち切り回数と手順⑧の試行繰り返し回数は、事前に設定しておくものとする。

4．2　実験結果

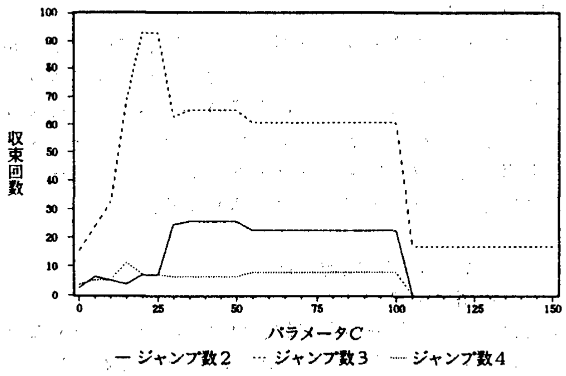
実験に用いる例題は、先に具体例として示したものを用いる。ただし、ニューラルネットワークのパラメータA,B,N',Nは以下のように固定し、パラメータCについては実験的に求めるものとする。

$$A=200 \quad B=100 \quad N'=6 \quad N=6$$

図はステップ打切り回数を400回とし、パラメータCの各値について1000回の試行を行った場合の線形拡大への収束回数をジャンプ数別に示したものである。

図より、ジャンプ数2の最適解への収束回数は、パラメータCが35～50付近で最も多くなることがわかる。

パラメータCと収束回数の関係



実験結果より、ある値まではパラメータCの増加と共に収束回数も増加する傾向を示し、これは提案した定理がニューラルネットワークを用いたＪＮＰの解法に有効であることを示すものである。また、ニューラルネットワークを用いることにより、ジャンプ数と共に線形拡大も得ることができた。

5．最後に

本研究では、NP-complete問題であるジャンプナンバー問題の最適解をニューラルネットワークをによって得るための定理を提案し、シミュレーション実験によって定理の有効性を確認できた。

ＪＮＰを教授順序の最適性に関する問題等に応用するならば、ニューラルネットワークを用いて、より小さいジャンプ数を指向させることは意味のあることである。

参考文献

1) J.J.Hopfield and D.W.Tank: "Neural" Computation of Decisions in Optimization Problem, Biol. Cybern. 52, pp.141-152, 1985
2) M.M.Syslo: A graph-theoretic approach to the jump number problem, pp.185-215 in "I.Rival(ed.), Graphs and Orders", D.Reidel Pub., 1985
3) 成嶋弘,西山英樹: 順序集合論の学習プログラム構造解析への試み,早稲田大学数学教育学会誌,第7巻第1号,pp.41-59,1989