# 動的データ構造によるボロノイ領域算出アルゴリズム

1R−10

相良 毅　大沢 裕
埼玉大学

## 1　はじめに

ボロノイ線図の効率的な算法は、計算幾何学の重要なテーマの一つである [1]。従来この算法に関し多くの研究がなされているが、これらは与えられた全ての点群に対するボロノイ線図を効率良く構成することに主眼が置かれている。本稿では、地理情報システムなどでの実用上、必ずしも全ての点群に対するボロノイ線図を構成する必要が無い点に着目し、点群のある一点に対しそのボロノイ領域を効率良く求めるアルゴリズムを提案する。

## 2　ボロノイ (Voronoi) 領域と従来の算法

平面上に点群 $G = \{P_i(i = 1,2,...)\}$ が与えられた時、点 $P_i$ のボロノイ領域とは $P_i$ が最近点となる領域のことである（図1参照）。また、ボロノイ領域は凸多角形によって囲まれる領域であり、この多角形をボロノイ多角形と呼ぶ。ボロノイ多角形の各辺は、隣接する点との垂直二等分線の一部である。点 $P$ のボロノイ領域は、$P$ の勢力圏と見なすこともできる。また、点 $P$ との間に辺をつくる点を点 $P$ の隣接点という。

従来提案されている方法は、逐次添加法 [2] と再帰二分法に大別される。前者は点を一つ追加する毎に新たなボロノイ多角形を添加していく方法であり、後者は点群を半分に分け、それぞれのボロノイ線図を併合する処理を再帰的に行なう方法である。このため、ある点に対するボロノイ領域を確定するには、全ての点に対するボロノイ線図を構成しなければならない。一方、地理情報システムなどへの応用に際しては、ある点やある限定された領域についてのボロノイ領域が必要な場合がある。従来の方法では、このような要求に対しても全ての点に対するボロノイ線図を構成する必要があった。そのため、通常は構成したボロノイ線図を保持しておいて、点が増減する度に更新する、という手法がとられている。

## 3　提案するアルゴリズムの原理

ボロノイ領域には次の性質がある。

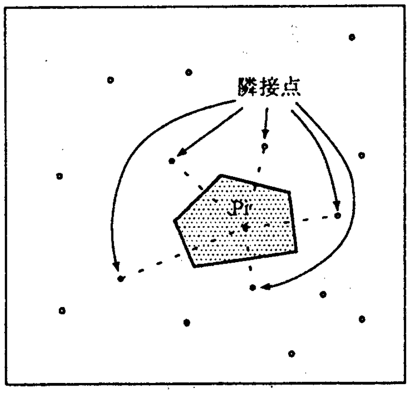



図1 ボロノイ領域と隣接点

**性質**　母点 $P_i$ のボロノイ多角形の全ての頂点 $V_1, V_2, ..., V_n$ に対して、$V_i$ を中心とし線分 $P_iV_i$ を半径とする円を描くと、それらの円の内部には母点は存在しない。

**略証**　もし頂点 $V_i$ を中心とする円内部に他の母点 $Q$ が存在すると、$V_i$ は線分 $P_iQ$ の垂直二等分線の $Q$ 側に位置することになる（図2）。これは $V_i$ に最も近い母点は $P_i$ である、というボロノイ領域の定義に反する。

この性質を利用して、次の手順に従って点 $P_i$ のボロノイ領域を作成する。

(1)　初期多角形として、全空間を表す矩形領域 $R$ を設定する。

(2)　多角形 $R$ の全ての頂点 $V_i(i = 1,2,...)$ に対し、線分 $V_iP_i$ を半径とし $V_i$ を中心とする円を考え、その内部に母点が存在するか調べる（図3）。

(3)　いずれかの円の内部に母点 $P_j$ が存在した場合、線分 $P_iP_j$ の垂直二等分線によって $R$ を切断し、$P_i$ を含む方を新たに $R$ とする。(2) に戻る。

(4)　いずれの円の内部にも母点が存在しなければ、$R$ をボロノイ領域として採用し、処理を終了する。

(1) において全空間を表す矩形を初期多角形とするのは、ボロノイ領域が開領域になると (2) の処理が不可能になってしまうからである。(2) の処理では範囲検索を行なう必要があるため動的多次元データ構造GBD木 [3] を使用する。

---

An Algorithm to Obtain a Voronoi Polygon on a Dynamic Data Structure
Takeshi Sagara, Yutaka Ohsawa
Saitama Univ.

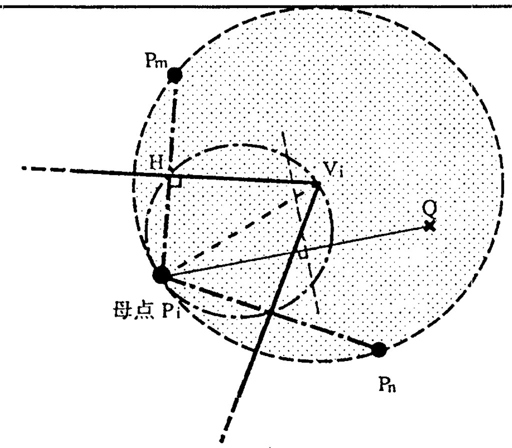



図2 母点が存在しない領域

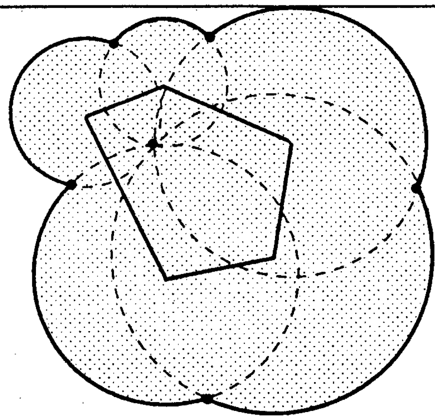


図3 ボロノイ多角形を更新する点の領域

## 4 GBD 木上での実現

動的データ構造 GBD 木は、各ノードに領域式と呼ばれる位置情報と、そのノードの下にある全ての図形の外接矩形の二種類の管理情報によって制御される木構造である。以下に GBD 木で母点 $P_i$ のボロノイ多角形を作成する処理を示す。

(1) 初期多角形として、全空間を表す矩形 $R$ を設定する。

(2) 点 $P_i$ が含まれる葉ノードまで降下する。

(3) 多角形 $R$ の全ての頂点について前節で述べた円領域を作り、それらの外接矩形 $L$ を作成する。

(4) カレントノードが葉ノードでなければ、下位ノードのうち $L$ と重複を持つ未処理のノードに降下する。葉ノードに到達するまで降下を繰り返す。

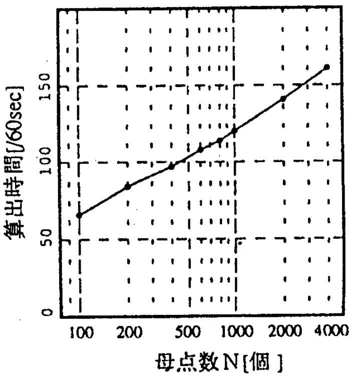
(5) もしカレントノードが葉ノードであれば、そのノード内で $L$ の内部にある全ての点によって多角形 $R$ を修正し、新たに $R$ とする。親ノードに戻り (3) の処理に移る。

(6) カレントノードの下位ノードで、$L$ と重複を持つ未処理のノードが無くなった時 $R$ をボロノイ多角形として採用し、処理を終了する。

$P_i$ と同じノード中の点は $P_i$ の近くに存在するので、(2) の処理によって無駄な検索を省ける。

## 5 実験結果

GBD 木で実現した方式により処理性能の測定を行なった。実験は SUN SP/ELC 上で行ない、時間の測定には times システム関数を使用した。実験は、乱数で発生した $N$ 個の母点のうち 100 個についてボロノイ領域を算出し、必要とした時間を求めた。それを各 $N$ に対し 10 回ずつ行なって平均値を求めた。$N$ の値は 100,200,400,600,800,1000,2000,4000 とした（図4に結果）。グラフより、この方式では平均で $O(\log N)$ の時間が必要と思われる。




| | |
|---|---|
| 100 | 64.4 |
| 200 | 85.1 |
| 400 | 98.5 |
| 600 | 108.3 |
| 800 | 115.4 |
| 1000 | 119.9 |
| 2000 | 140.1 |
| 4000 | 160.0 |
| 母点数N | 時間 |

図4 実験結果

## 6 まとめ

与えられた点群の、ある一点に対するボロノイ領域を効率的に算出するアルゴリズムを考案した。このアルゴリズムは、点群の一部に対するボロノイ線図を構成する場合に有効である。理論的な計算手間の考察が今後の課題である。

## 参考文献

[1] F.P.Preparata and M.I.Shamos, "Computational Geometry",Springer-Verlog,1985

[2] 伊理編,「地理的情報の処理に関する基本アルゴリズム」, 日本 OR 学会,1983

[3] 大沢, 坂内,「2種類の補助情報により検索と管理性能の向上を図った多次元データ構造の提案」, 信学論,Vol.J74-D-I,No.8,pp467-475,1991