

# 1M-8 フリーフォームデザインシステム (3) 曲面の数学モデルについて

栗山 繁\* 南方 博視\*\* 浦野 直樹\*

日本アイ・ビー・エム (株)

\* 東京基礎研究所 \*\*CIM PO 技術センター

## 1 はじめに

本稿では、先の(2)「ペンによる直接形状入力」で提案した手法に基づいて生成される、3次元情報を有する平面曲線のデータから、曲面の張られる領域を定義する曲線網のトポロジーを決定する手法、およびそのトポロジーデータをもとに、曲線データを補間して多辺形パッチ曲面を生成する手法について述べる。

今後は、曲線網とそれに対して張られる曲面、およびその曲面を境界とする立体のトポロジーを共通のデータ構造で表現し、トポロジー要素に対する柔軟な操作を実現するため、非多様体モデルに基づくトポロジーデータ構造<sup>3)</sup>を組み込む予定である。

## 2 トポロジーの決定法

本システムでは、曲線網のトポロジーをハーフエッジに基づくデータ構造で表現している<sup>4)</sup>。ハーフエッジのトポロジー要素は、曲線同士が互いに交わる点(参照点)を両端とする曲線セグメントに対して生成される。参照点を共有するハーフエッジ間の、曲面領域を定義する隣接位相関係は、曲線網に対して張られる曲面の参照点における法線の向きにより一意に決定される(但し、参照点では2本の曲線のみが交わるものとする)。このとき、デザイナーが全ての参照点において法線の向きを指定する労力を軽減するために、その向きを以下のi.~iv.の手続きによって推定する(図1参照)。

- i. 曲線の定義される平面 PL の法線ベクトル  $N$  に対して半時計回りに曲線が媒介変数表示されているものとし、その接線ベクトル  $T$  と法線ベクトル  $N$  の外積より外向ベクトル  $C = T \times N$  を求める。
- ii. 2曲線の交点  $P_{12}$  における各曲線の接線ベクトル  $T_1$  と  $T_2$  の外積より、その点での接平面法線ベクトル  $N_{12} = T_1 \times T_2$  を求める。
- iii. 交点  $P_{12}$  における各曲線の外向ベクトル  $C_1$  および  $C_2$  と手続き ii. で求めた接平面法線ベクトルの内積  $V_i = C_i \cdot N_{12}$ ,  $i = 1, 2$  を求め、その値が両方とも正の場合は  $N_{12}$  は曲面に対して外向き、両方とも負の場合は内向きとする。
- iv. 手続き iii. で求めた内積の値の符号が一致しない場合  $V_1 \cdot V_2 < 0$  は、その交点における接平面法線ベクトルの向きの内外をデザイナーに直接指定させる。

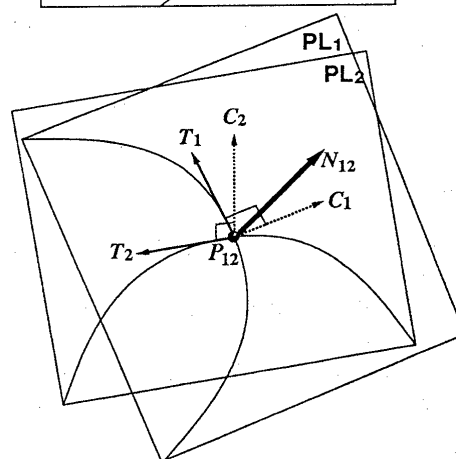
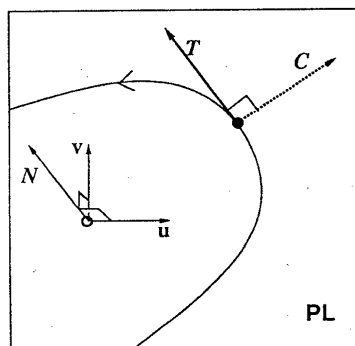


図1: 参照点における接平面法線ベクトル

Free Form Design System (3) Mathematical Model of Surfaces  
Shigeru KURIYAMA\*, Hiroshi MINAKATA\*\*, and Naoki URANO\*  
\*Tokyo Research Laboratory, IBM Japan, Ltd.  
\*\*CIM Plant Operation Technology Center, IBM Japan, Ltd.

### 3 多辺形パッチの生成法

2 節で生成されたトポロジーデータにより, 曲面の領域を囲み境界を定義する曲線セグメントの集合

$C_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  が選ばれる. 但し, 各曲線セグメント  $C_i$  は変数区間  $t \in [t_i^0, t_i^1]$  で定義され,  $C_{i-1}(t_{i-1}^0) = C_i(t_i^0)$ ,  $C_i(t_i^1) = C_{i+1}(t_{i+1}^0)$  の関係を満たすものとする.

$m$ 本の曲線で囲まれた領域に対しては  $m$ 変量の重心座標系<sup>2)</sup>を用いて多辺形パッチ曲面を生成する. この曲面は, 互いに交差する境界曲線対を掃引して得られる曲面を超限補間関数で融合することにより生成され, その境界曲線が  $n$  次のパラメトリックな連続性 ( $C^n$  級) の条件を満たせば, 生成される曲面は  $n$  次の幾何学的な連続性 ( $G^n$  級) の条件を満たす<sup>6)</sup>.

本手法では, 多辺形パッチ  $Q^m$  を以下のように構成する.

$$Q^m(\ell) = \sum_{i=1}^m S_i(\ell) B_i^n(\ell), \quad B_i^n(\ell) = \frac{(\ell_i \ell_{i+1})^n}{\sum_{k=1}^m (\ell_k \ell_{k+1})^n}.$$

ここで  $Q^m$  は融合関数  $B_i^n$  によって, 副曲面  $S_i$  の境界曲線  $C_i$  上における  $n$  次までの幾何学的連続性を継承する.

$i$  番目の境界に対して生成される副曲面  $S_i$  は局所変数  $(u_i, v_i)$  を用い,  $C_i$  を誘導曲線,  $C_p$  を横断曲線として生成される掃引曲面:

$$T_{i,p}(u_i, v_i) = M_p[C_p(v_i + t_p^0) - C_p(t_p^0)] + C_i(u_i + t_i^0),$$

$$p = i - 1, i + 1,$$

の線形結合によって, 以下のように表される.

$$S_i = g_{i-1}(u_i) T_{i,i-1}(u_i, v_i) + g_{i+1}(u_i) T_{i,i+1}(u_i, v_i).$$

このとき局所的な直交変数空間  $(u_i, v_i)$  は,  $m$ 変量重心座標系を用いて以下のように構成される.

$$d_i = (t_i^1 - t_i^0), \quad \mu = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor, \quad \omega_i = \begin{cases} 1, & m \text{ is even} \\ \frac{1}{1 - \ell_{i+\mu+1}}, & m \text{ is odd} \end{cases}$$

$$u_i = d_i \omega_i \sum_{k=1}^{\mu} \ell_{i+k}, \quad v_i = \left[ \frac{d_{i-1}}{d_i} (d_i - u_i) + \frac{d_{i+1}}{d_i} u_i \right] \sum_{k=2}^{m-1} \ell_{i+k}.$$

但し,  $\ell$  の添字は  $m$  を法として表され,  $\lfloor \cdot \rfloor$  は少数部打ち切り関数を表す.

掃引曲面の定義式には  $3 \times 3$  のアフィン変換行列  $M_p$  が用いられ, その各要素は局所変数  $u_i$  のみに依存する任意の関数で表される. 但し,  $M_p$  が単位行列の場合は横断曲線を誘導曲線に沿って平行掃引した曲面が生成される.

誘導曲線  $C_i$  の  $u$  に関する Frenet-frame  $F(u)$ <sup>1)</sup> は以下の正規直交行列:

$$F(u) = [t(u), m(u), b(u)]$$

$$t(u) = \frac{\dot{C}_i(u)}{\|\dot{C}_i(u)\|}, \quad b(u) = \frac{\dot{C}_i(u) \times \ddot{C}_i(u)}{\|\dot{C}_i(u) \times \ddot{C}_i(u)\|}, \quad m(u) = b(u) \times t(u)$$

で定義されるが, この行列空間の写像により, 横断曲線  $C_p$  に対するアフィン変換行列  $M_p$  が  $F$  の逆行列  $F^{-1}$  を用いて以下のように求められる.

$$M_{i-1} = F(u_i + t_i^0) F(t_i^0)^{(-1)}, \quad M_{i+1} = F(u_i + t_i^0) F(t_i^1)^{(-1)}.$$

融合関数  $g_{i-1}, g_{i+1}$  は以下の制約式

$$g_{i-1}(u_i) + g_{i+1}(u_i) \equiv 1, \quad u_i \in [0, d_i], \quad g_{i-1}(0) = 1, \quad g_{i+1}(d_i) = 1.$$

を満たす任意の関数を設定することができる. ここでは, 各曲線  $C_i$  に対して曲面形状への影響度を指定する変数  $w_i$  を割り当て, この値を用いて融合関数  $g_{i-1}, g_{i+1}$  を以下のように構成する.

$$g_{i-1}(u_i) = \frac{w_{i-1}(d_i - u_i)}{w_{i-1}(d_i - u_i) + w_{i+1}u_i},$$

$$g_{i+1}(u_i) = \frac{w_{i+1}u_i}{w_{i-1}(d_i - u_i) + w_{i+1}u_i}.$$

### 4 おわりに

本稿では, 任意の接続関係で与えられる曲線網から, 曲面のトポロジーを決定し, 多辺形パッチ曲面を生成する手法について述べた. 本稿で述べた曲面生成法は, 以下に列挙する曲線間の特異な交差状態:

- 3 本以上の曲線が同一の参照点で交わる.
- 開曲線がその開放端で他の曲線と交わる.
- 閉領域を構成しない孤立したエッジが存在する.
- 2 個のエッジから構成される閉領域が存在する.

を考慮していない. しかし, a. と b. の場合に関しては, 掃引曲面の生成法を拡張して連続曲面を生成することができた<sup>5)</sup>. 現在は, c. と d. の場合についても  $G^n$  級の条件を満たす曲面を生成する手法の検討, 評価を行っている. 今後の課題として,

1. 平面上に存在しない曲線, または特異な交差状態の曲線を含む曲線網のトポロジーの決定法.
  2. 既存の CAD システム (CATIA など) とのデータ交換.
- などが挙げられる.

### 参考文献

- 1) G. Farin, editor. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design A Practical Guide*. pages 175-178. Academic Press, 1990.
- 2) C. T. Loop and T. D. DeRose. A multisided generalization of Bézier surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, 8(3):204-234, July 1989.
- 3) H. Masuda, K. Shimada, M. Numao, and S. Kawabe. A mathematical theory and applications of non-manifold geometric modeling. In F. L. Krause, H. Jansen, editor, *Advanced Geometric Modelling for Engineering Applications*, pages 89-103. North-Holland, 1989.
- 4) M. Mäntylä. *An Introduction to Solid Modeling*. Computer Science Press, 1988.
- 5) 栗山繁. 形状特徴曲線からの多辺形パッチ曲面生成. 第 7 回 NICOGRAPH 論文コンテスト, pages 129-136. 日本コンピュータグラフィックス協会, 1991.
- 6) 栗山繁.  $G^n$  級多辺形パッチ曲面の生成手法. 信学論 (D-2), J75-D-II(2):379-385, 1992.