級数に基づく多数桁計算の演算量削減を実現する分割有理数化法

後 保範[†] 金田康正[††] 高橋大介[††,☆]

ベキ級数で表現される関数に対して，n 桁の精度でその値を計算する方法を提案する．この方法は，分割統治法に基づくので分割有理数化法（Divide and Rationalize Method，DRM 法）と名付けるが，従来の計算量を改善するものである．n 桁の乗算の演算量を $M(n)$ とするとき，入力値が $O(1)$ 桁の有理数の場合，DRM 法により計算量を $O(n^2)$ から $O(M(n)\cdot(\log_2 n)^2)$ 以下にできる．また，入力値が n 桁の精度で関数に加法定理が適用できる場合には，計算量を $O(M(n)\cdot n)$ から $O(M(n)\cdot(\log_2 n)^3)$ 以下に削減する．この DRM 法は 2 つの方法から構成される．第 1 の方法は級数の和の計算にトーナメント方式を適用し 2 項ずつ通分して有理数化し，除算で n 桁精度の実数にする方式である．第 2 の方法は n 桁精度の入力値 X を分母の桁数が上位桁から $\alpha, 2\alpha, 4\alpha, \cdots, 2^{p-1}\alpha$ 桁ずつの有理数に分解し，各分割ごとに関数値を計算し，それらから加法定理を用いて X での関数値を計算する方式である．本方法は関数の多数桁計算で著名な Brent のアルゴリズムより適用範囲が広く，連分数の計算や基底変換にも適用可能で，アルゴリズムはより単純で分かりやすい．また，並列処理に向いており，計算桁数を増加するとき計算済みの有理数が再利用可能である．

A Divide and Rationalize Method which Improves the Multiple-precision Function Computation with Series Expansion

Yasunori Ushiro,[†] Yasumasa Kanada[††] and Daisuke Takahashi[††,☆]

We propose a new divide and conquer method for n-digit evaluation of functions expressed by power series. The method which we call Divide and Rationalize Method (DRM) improves the conventional computing complexity. In the case of the input precision with an $O(1)$-digit rational number, the method reduces the complexity of n-digit function computation from $O(n^2)$ to $O(M(n)\cdot(\log_2 n)^2)$ or below. In the case of the input precision with an n-digit real number and possible to use the addition theorem, the method reduces the n-digit function computation from $O(M(n)\cdot n)$ to $O(M(n)\cdot(\log_2 n)^3)$ or below, where $M(n)$ is the number of computation operations required to multiply n-digit precision numbers. The DRM consists of two methods. The first method is a method which sums up from each rational numbers in the series to n-digit rational numbers with tournament method. The second method is a method which computes a value of the function for each digit corresponding to an input value of rational number with $\alpha, 2\alpha, 4\alpha, \cdots, 2^{p-1}\alpha$ digit denominator from the higher digit and sums the value of the function according to the addition theorem. The coverage of the proposed method is wider in the multiple-precision function computation than Brent's algorithm and it can be applicable to radix conversion and computation of continued fractions. Also, it is suitable for the parallel processing and possible to reuse intermediate rational results for more higher precision computation.

1. はじめに

三角関数，指数関数，対数関数および逆三角関数等の数学関数は Taylor 展開で無限級数に展開できる．このような無限級数に展開できる関数を多数桁の精度で計算するためには，適当な項数で打ち切り各項ごとに多数桁計算を行いそれらの和を用いる方法が知られている．

この方法の場合，n 桁の乗算の演算量を $M(n)$ とするとき，入力値の精度が $O(1)$ 桁（計算機の倍精度で表示できる 10 進 10 数桁以内）の有理数の場合には n 桁精度の関数値計算に $O(n^2)$ の計算量が，また入力値が n 桁精度の場合には $O(M(n)\cdot n)$ の計算量が必要である．これに対し，n 桁精度の関数値計算に分割

† 株式会社日立製作所エンタープライズサーバ事業部
Enterprise Server Division, Hitachi Ltd.
†† 東京大学情報基盤センター
Information Technology Center, University of Tokyo
☆ 現在，埼玉大学大学院理工学研究科
Presently with Graduate School of Science and Engineering, Saitama University

統治法を適用することで，入力値が $O(1)$ 桁の有理数の場合には計算量を $O(M(n)\cdot(\log_2 n)^2)$ 以下に，また入力値が n 桁精度で，初等関数のように加法定理が適用できる場合には，計算量を $O(M(n)\cdot(\log_2 n)^3)$ 以下に削減する方式を提案する．

本論文で提案する方式を分割有理数化法（Divide and Rationalize Method，以下 DRM 法）と名付ける．本 DRM 法は 2 つの方法から構成される．第 1 の方法では入力値の精度が $O(1)$ 桁の有理数の場合に n 桁の乗算の演算量を $M(n)$ とするとき，トーナメント有理数化処理[1),2)]で級数に展開される関数の n 桁精度関数値計算の計算量を $O(M(n)\cdot(\log_2 n)^2)$ 以下に削減する．

第 2 の方法では加法定理が適用できる関数の多数桁計算において，n 桁精度の入力値を上位桁から分母の桁数が $\alpha, 2\alpha, 4\alpha, \cdots, 2^{p-1}\alpha$ 桁ずつの有理数に分割する．各分割した値に対する関数値計算の演算量を $T(n)$ とするとき，n 桁精度の関数値の計算を $O(T(n)\cdot\log_2 n)$ の計算量で実現する．この 2 つの方法を結合して，多数桁精度の入力で多数桁の関数値計算の計算量を削減するのが DRM 法である．

また，本 DRM 法は連分数で表現される関数値の多数桁精度の計算および 2 進 10 進変換に代表される多数桁の基底変換にも適用可能である．

本 DRM 法は多数桁精度を必要とする関数値計算に適用でき，各種関数を含めた多数桁計算システムの構築に有用である．また Brent[3)]のアルゴリズムより単純で分かりやすいうえに，適用範囲も広く自然な並列化が可能な点が特長である．

以下，2 章で級数に展開される関数値の n 桁精度の計算で，入力値の精度が $O(1)$ 桁精度の有理数の場合の計算方法について述べる．3 章で入力値が $O(1)$ 桁精度の有理数の場合に，級数に展開される関数を多数桁精度（n 桁）でトーナメント有理数化処理を適用して計算するときの計算量を評価し，4 章で級数で表現され加法定理が適用できる関数の入力値が m 桁 ($m \le n$) で，結果の関数値が n 桁精度の場合の計算について述べる．5 章で提案した DRM 法の並列化と計算桁数を増加させた場合における結果の再利用性について，6 章は関連研究について述べる．7 章はまとめである．

2. トーナメント有理数化処理

まず一般的に級数で表現される関数の計算方法を説明し，次いで各関数の具体的計算における係数を示す．

2.1 級数関数の有理数化処理

x と y は $0 < |y| < |x|$ なる整数で，関数 $f\left(\frac{y}{x}\right)$ が無限級数

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_{0,l}}{b_{0,l}} \left(\prod_{k=0}^{l} \frac{c_{0,k}}{d_{0,k}}\right) \left(\frac{y}{x}\right)^{\gamma+\beta l} \qquad (1)$$

に展開されるとする．ここで，$a_{0,l}$，$b_{0,l}$，$c_{0,k}$，$d_{0,k}$ は整数とする．また，γ は整数で，β は自然数とする．関数 $f\left(\frac{y}{x}\right)$ の値を小数点以下 B 進 n 桁の精度で求めるには，最終項の絶対値とそれ以下の剰余項の和の最大値の比である $\left(1-\left|\left(\frac{y}{x}\right)^{\beta}\right|\right)$ 対 1 を考慮して

$$\left|\frac{b_{0,q}}{a_{0,q}} \left(\prod_{k=0}^{q} \frac{d_{0,k}}{c_{0,k}}\right) \left(\frac{x}{y}\right)^{\gamma+\beta q}\right| \left(1-\left|\left(\frac{y}{x}\right)^{\beta}\right|\right) \ge B^{n+1} \qquad (2)$$

となる項数 q まで理論的には計算すればよい．さらに，実際の計算ではガード桁を考慮する必要がある．

q 項からなる関数 $f\left(\frac{y}{x}\right)$ を 2 項ずつまとめて表示すると下記のようになる．

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \sum_{l=0}^{\lceil q/2 \rceil} \left(\frac{y}{x}\right)^{\gamma+2\beta l} \left(\prod_{k=0}^{2l} \frac{c_{0,k}}{d_{0,k}}\right) \times \left(\frac{a_{0,2l}}{b_{0,2l}} + \frac{a_{0,2l+1}}{b_{0,2l+1}} \cdot \frac{c_{0,2l+1}}{d_{0,2l+1}} \left(\frac{y}{x}\right)^{\beta}\right)$$

ここで $q+1$ 項以降は適当に 0 と仮定する．

これを，以下のようにトーナメント方式を適用し 2 項ずつ通分処理で有理数にする．p 段目の有理数化処理は下記のようになる．

$$\begin{aligned} f\left(\frac{y}{x}\right) &= \sum_{l=0}^{L_p} \left(\frac{y}{x}\right)^{\gamma+2^p\beta l} \left(\prod_{k=0}^{2l} \frac{c_{p-1,k}}{d_{p-1,k}}\right) \\ &\quad \times \left(\frac{a_{p-1,2l}}{b_{p-1,2l}} + \frac{a_{p-1,2l+1}}{b_{p-1,2l+1}} \cdot \frac{c_{p-1,2l+1}}{d_{p-1,2l+1}} \left(\frac{y}{x}\right)^{2^{p-1}\beta}\right) \\ &= \sum_{l=0}^{L_p} \left(\frac{y}{x}\right)^{\gamma+2^p\beta l} \left(\prod_{k=0}^{2l} \frac{c_{p-1,k}}{d_{p-1,k}}\right) \\ &\quad \times \left(a_{p-1,2l} b_{p-1,2l+1} d_{p-1,2l+1} x^{2^{p-1}\beta} + a_{p-1,2l+1} b_{p-1,2l} c_{p-1,2l+1} y^{2^{p-1}\beta}\right) \\ &\quad \div \left(b_{p-1,2l} b_{p-1,2l+1} d_{p-1,2l+1} x^{2^{p-1}\beta}\right) \\ &\equiv \sum_{l=0}^{L_p} \left(\frac{y}{x}\right)^{\gamma+2^p\beta l} \left(\prod_{k=0}^{l} \frac{c_{p,k}}{d_{p,k}}\right) \frac{a_{p,l}}{b_{p,l}} \end{aligned}$$

表 1 各関数におけるトーナメント有理数化処理の具体的係数
Table 1 Table of coefficients for the several series functions.

項番	関数記号	β	γ	$a_{0,l}$	$b_{0,l}$	$c_{0,k}$	$d_{0,k}$
1	$\exp\left(\frac{y}{x}\right)$	1	0	1	1	1	k
2	$\log\left(1+\frac{y}{x}\right)$	1	1	$(-1)^l$	$l+1$	1	1
3	$\sin\left(\frac{y}{x}\right)$	2	1	$(-1)^l$	1	1	$2k(2k+1)$
4	$\cos\left(\frac{y}{x}\right)$	2	0	$(-1)^l$	1	1	$2k(2k-1)$
5	$\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$	2	1	$(-1)^l$	$2l+1$	1	1
6	$\arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$	2	1	1	$2l+1$	$2k-1$	$2k$
7	$\mathrm{Erf}\left(\frac{y}{x}\right)$	2	1	$(-1)^l$	$2l+1$	1	k
8	$\mathrm{Si}\left(\frac{y}{x}\right)$	2	1	$(-1)^l$	$2l+1$	1	$2k(2k+1)$
9	$J_0\left(\frac{y}{x}\right)$	2	0	$(-1)^l$	1	1	$(2k)^2$
10	$\frac{(2u)^{3/2}}{12\pi}$	0	0	$v+wl$	$(-1)^l$	$(6k-5)\cdot(6k-3)\cdot(6k-1)$	$(uk)^3$

注）$u=320160$, $v=13591409$, $w=545140134$ であり，$l=0,1,\cdots,$ $k=0,1,\cdots,l$ で $l-1$ や $k-1$ のように 0 以下の値となるときは 1 とする．項番 10 の π の計算式は文献 4) に示されている．

ここで，$p=1,2,\cdots,\lceil\log_2(q)\rceil$ であり $L_p=\lceil q/2^p\rceil$ である．また $c_{p,k}\equiv c_{p-1,2k}c_{p-1,2k+1}$，$d_{p,k}\equiv d_{p-1,2k}d_{p-1,2k+1}$ であり $a_{p,l}$，$b_{p,l}$ は上式に従って定義する．

2.2 具 体 例

三角関数や指数関数などの初等関数と誤差関数などの特殊関数および円周率計算公式を例に具体的係数を**表 1** に示す．

ここで関数 $f\left(\frac{y}{x}\right)$ は式 (1) の級数で，たとえば $\arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$ は次のように表される．

$$\arcsin\left(\frac{y}{x}\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_{0,l}}{b_{0,l}}\left(\prod_{k=0}^{l}\frac{c_{0,k}}{d_{0,k}}\right)\left(\frac{y}{x}\right)^{\gamma+\beta l}$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\left(\prod_{k=1}^{l}\frac{2k-1}{2k}\right)\times\left(\frac{y}{x}\right)^{2l+1}$$

3. 入力値の精度が $O(1)$ 桁である関数値計算の計算量

まず使用記号を下記に定義する．関数値計算に必要な級数の項数は 2 のべき乗とはならないが，計算量の算出のため 2 のべき乗としても一般性を失わない．

n ：計算結果の関数値の桁数（B 進 n 桁）
$q(n)$ ：関数計算に必要な級数の項数
（$q(n)=2^{p(n)}$）
$p(n)$ ：トーナメント有理数化処理の段数
（$p(n)=\log_2 q(n)$）
$M(n)$：n 桁の乗算の演算量

ここで，$q(n)$，$p(n)$ は n の関数で $q(n)$ と n の関係は次のようになる（付録 A.1 参照）．

(a) 級数の係数が指数的に減少する場合

$$O(q(n)\cdot\log_B q(n))=O(n) \tag{3}$$

(b) 級数の係数が逆数的に減少する場合（係数が減少しない場合を含む）

$$O(q(n))=O(n) \tag{4}$$

一方，有理数化処理の最終段の分子と分母の桁数は，入力値の精度が $O(1)$ 桁のため $O(\log_B(q(n)!))$，すなわち $O(q(n)\cdot\log_B q(n))$ となる．また有理数化処理では 2 項ずつ有理数を通分処理するため，1 段前の処理では分子と分母の桁数は半減し項数は 2 倍となる．これから，級数に展開される関数の n 桁精度の関数値計算の計算量 $O(T(n))$ は次のようになる．

$$O(T(n)) = O\left(\sum_{l=0}^{p(n)-1} 2^l \cdot M(2^{-l} \cdot q(n) \cdot \log_B q(n))\right)$$

現時点で知られている乗算の最良の計算量が $O(M(n)) = O(n \cdot \log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n)$ [5)]であることを考えると

$$M(n) \geq 2M\left(\frac{n}{2}\right) \geq 2^l M\left(\frac{n}{2^l}\right) \quad l = 1, 2, \cdots n$$

が成立する．なお，この関係式は筆算による $O(M(n)) = O(n^2)$ の場合や，Karatsuba 法に基づく $O(M(n)) = O(n^{\log_2 3})$ の場合においても成立することに注意しておく．

l がある値より大きいとき $\dfrac{2^l}{\log_B q(n)} \geq 1$ が成立するため，次式が成立する．

$$\begin{aligned} &2^l \cdot M(\log_B q(n)) \\ &\quad \leq 2^l \cdot \frac{\log_B q(n)}{2^l} \cdot M\left(\log_B q(n) \cdot \frac{2^l}{\log_B q(n)}\right) \\ &\quad = \log_B q(n) \cdot M(2^l) \\ &\qquad l = k, k+1, \cdots, p(n)-1 \end{aligned}$$

したがって，桁数 n がある値（数百桁）以上の多数桁の関数値計算では，級数に展開される関数の n 桁精度の関数値計算の計算量 $O(T(n))$ は次のようになる．

$$O(T(n)) = O\left(\sum_{l=0}^{p(n)-1} 2^l \cdot M(2^{-l} \cdot q(n) \cdot \log_B q(n))\right)$$

$$O(T(n)) \leq O\left(\sum_{l=0}^{p(n)-1} \log_B q(n) \cdot M(q(n))\right) \qquad (5)$$

$$\begin{aligned} &O\left(\sum_{l=0}^{p(n)-1} \log_B q(n) \cdot M(q(n))\right) \\ &\quad = O\left(M(q(n)) \cdot \log_B q(n) \cdot p(n)\right) \\ &\quad = O\left(M(q(n)) \cdot \log_B q(n) \cdot \log_2 q(n)\right) \qquad (6) \end{aligned}$$

式 (3) と式 (4) における $q(n)$，n の関係を式 (5)，(6) に適用して計算量 $O(T(n))$ を評価すると次のようになる．

(a) 級数の係数が指数的に減少する場合：$O(q(n) \cdot \log_B q(n)) = O(n)$

$$\begin{aligned} &O(T(n)) \\ &\quad \leq O(M(q(n)) \cdot \log_B q(n) \cdot \log_2 q(n)) \\ &O(M(q(n)) \cdot \log_B q(n) \cdot \log_2 q(n)) \\ &\quad \leq O(M(q(n) \cdot \log_B q(n)) \cdot \log_2 q(n)) \\ &O(M(q(n) \cdot \log_B q(n)) \cdot \log_2 q(n)) \\ &\quad = O(M(n) \cdot \log_2 q(n)) \end{aligned}$$

$\log_B q(n) > 1$ のため，式 (3) から $O(q(n)) \leq O(n)$ となる．したがって，次式が成立する．

$$\begin{aligned} &O(M(n) \cdot \log_2 q(n)) \leq O(M(n) \cdot \log_2 n) \\ &O(T(n)) \leq O(M(n) \cdot \log_2 n) \end{aligned}$$

(b) 級数の係数が逆数的に減少する場合：$O(q(n)) = O(n)$（係数が減少しない場合を含む）

$$\begin{aligned} &O(T(n)) \\ &\quad \leq O(M(q(n)) \cdot \log_B q(n) \cdot \log_2 q(n)) \\ &O(M(q(n)) \cdot \log_B q(n) \cdot \log_2 q(n)) \\ &\quad = O(M(n) \cdot \log_B n \cdot \log_2 n) \\ &O(M(n) \cdot \log_B n \cdot \log_2 n) \\ &\quad = O(M(n) \cdot (\log_2 n)^2) \end{aligned}$$

よって $O(T(n)) \leq O(M(n) \cdot (\log_2 n)^2)$．

すなわち，級数に展開される関数の n 桁精度の関数値計算の計算量 $O(T(n))$ は，入力値が $O(1)$ 桁精度の有理数の場合には $O(M(n) \cdot (\log_2 n)^2)$ 以下になる．

4. 入力値が多数桁精度（m 桁）の場合の計算方法

級数で表現され加法定理が適用できる関数を考えよう．この場合には，入力値が基本区間外（たとえば $\exp(X)$ では $|X| \geq 1$）でも，適当な区間還元方式で区間内の実数の関数計算に帰着できるため，ここでは入力値は級数が収束する区間内の値とする．

まず m 桁精度の入力値 X が加法定理を使用して p 個（$O(\log_2 m)$ 個）に分割できる例として，関数 $\exp(X)$ と関数 $\sin(X)$ の計算を示す．**表 2** に示す記号を使用すると $\exp(X)$ および $\sin(X)$ は次のように表される．

$$\begin{aligned} \exp(X) &= \exp\left(\frac{x_1}{B^\alpha} + \frac{x_2}{B^{2\alpha}} + \frac{x_3}{B^{4\alpha}} + \frac{x_4}{B^{8\alpha}} + \cdots + \frac{x_p}{B^{2^{p-1}\alpha}}\right) \\ &= \exp(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_p) \end{aligned}$$

表 2 入力値 X の上位桁からの有理数による分割
Table 2 Ratinal divisions of input value X.

小数点以下桁数	分母の桁数	値（有理数）
$1 \sim \alpha$	α	$a_1 \equiv \frac{x_1}{B^\alpha}$
$\alpha+1 \sim 2\alpha$	2α	$a_2 \equiv \frac{x_2}{B^{2\alpha}}$
$2\alpha+1 \sim 4\alpha$	4α	$a_3 \equiv \frac{x_3}{B^{4\alpha}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2^{S-2}\alpha+1 \sim 2^{S-1}\alpha$	$2^{S-1}\alpha$	$a_S \equiv \frac{x_S}{B^{2^{S-1}\alpha}}$

$$
\begin{aligned}
&= \exp(a_1)\cdot\exp(a_2)\cdot\exp(a_3)\cdot\exp(a_4)\\
&\quad \cdots\exp(a_p)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin(X) &= \sin\biggl(\frac{x_1}{B^{\alpha}}+\frac{x_2}{B^{2\alpha}}+\frac{x_3}{B^{4\alpha}}+\frac{x_4}{B^{8\alpha}}\\
&\quad +\cdots+\frac{x_p}{B^{2^{p-1}\alpha}}\biggr)\\
&= \sin(a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_p)\\
&= \sin(a_1)\cdot\cos(a_2+a_3+\cdots+a_p)\\
&\quad +\cos(a_1)\cdot\sin(a_2+a_3+\cdots+a_p)\\
&= \sin(a_1)(\cos(a_2)\cdot\cos(a_3+\cdots+a_p)\\
&\quad -\sin(a_2)\cdot\sin(a_3+\cdots+a_p))\\
&\quad +\cos(a_1)(\sin(a_2)\cdot\cos(a_3+\cdots+a_p)\\
&\quad +\cos(a_2)\cdot\sin(a_3+\cdots+a_p))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sin(a_3+\cdots+a_p)\\
&\quad = \sin(a_3)\cdot\cos(a_4+\cdots+a_p)\\
&\qquad +\cos(a_3)\cdot\sin(a_4+\cdots+a_p)\\
&\cos(a_3+\cdots+a_p)\\
&\quad = \cos(a_3)\cdot\cos(a_4+\cdots+a_p)\\
&\qquad -\sin(a_3)\cdot\sin(a_4+\cdots+a_p)\\
&\sin(a_4+\cdots+a_p)\\
&\quad = \sin(a_4)\cdot\cos(a_5+\cdots+a_p)\\
&\qquad +\cos(a_4)\cdot\sin(a_5+\cdots+a_p)\\
&\cos(a_4+\cdots+a_p)\\
&\quad = \cos(a_4)\cdot\cos(a_5+\cdots+a_p)\\
&\qquad -\sin(a_4)\cdot\sin(a_5+\cdots+a_p)\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&\sin(a_{p-1}+a_p)\\
&\quad = \sin(a_{p-1})\cdot\cos(a_p)+\cos(a_{p-1})\cdot\sin(a_p)\\
&\cos(a_{p-1}+a_p)\\
&\quad = \cos(a_{p-1})\cdot\cos(a_p)-\sin(a_{p-1})\cdot\sin(a_p)
\end{aligned}
$$

次に，m 桁精度の入力値 X を加法定理を使用して p 個（$O(\log_2 m)$ 個）の有理数に分割できず，q 個（$O(\log_2 n)$ 個）に分割する例として関数 $\log(1+X)$ を示す．

表 2 に示す記号を使用すると $\log(1+X)$ は次のように表される．

$$
\begin{aligned}
&\log(1+X)\\
&\quad = \log\biggl(\Bigl(1+\frac{x_1}{B^{\alpha}}\Bigr)\cdot\Bigl(1+\frac{x_2}{B^{2\alpha}}\Bigr)\cdot\Bigl(1+\frac{x_3}{B^{4\alpha}}\Bigr)\\
&\qquad \cdots\Bigl(1+\frac{x_q}{B^{2^{q-1}\alpha}}\Bigr)\biggr)\\
&\quad = \log((1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot(1+a_3)\\
&\qquad \cdots(1+a_q))\\
&\quad = \log(1+a_1)+\log(1+a_2)+\log(1+a_3)\\
&\qquad +\cdots+\log(1+a_q)
\end{aligned}
$$

一般的に，m 桁の実数 X を上位桁から分母の桁数が $\alpha, 2\alpha, 4\alpha, \cdots, 2^{p-1}\alpha$ 桁 ($m \le 2^{p-1}\alpha$) の p 個の有理数，または $\alpha, 2\alpha, 4\alpha, \cdots, 2^{q-1}\alpha$ 桁 ($n \le 2^{q-1}\alpha$) の q 個の有理数に分ける．指数関数や三角関数では単純に実数 X を上位桁から分割できるため，p 個すなわち $O(\log_2 m)$ 個の有理数に分割できる．一方，対数関数や逆三角関数では，除算やさらに複雑な演算で実数 X を $\alpha, 2\alpha, 4\alpha, \cdots$ 桁の有理数に上位桁から順次割り戻すため，入力値 X が m 桁でも，関数値の精度と同等な n 桁の精度が必要となり，q 個すなわち $O(\log_2 n)$ 個の有理数に分割する必要がある．

このとき，上位桁から分割に対応する値（有理数）を表 2 に示す．ここでの計算は B 進法とする．

ここで，$S=p$ または $S=q$ であり，$\sin(X)$ では

$$
\begin{aligned}
X &= \sum_{k=1}^{p} a_k \text{ で } \log(1+X) \text{ では } 1+X\\
&= \prod_{k=1}^{q}(1+a_k)
\end{aligned}
$$

となるように各 x_k を定める．

一方，付録 A.2 より上位桁から B 進 α 桁と，$2^k\alpha$ 桁それぞれに分割した場合の各々の関数値の n 桁精度計算の計算量をそれぞれ $O(T_0(n))$，$O(T_k(n))$ とするとき $O(T_0(n)) \ge O(T_k(n))$ である．

すなわち，分割した各入力値における関数値の n 桁精度計算の計算量 $O(T_k(n))$ は入力値が $O(1)$ 桁の有理数の n 桁精度の関数値の計算量と同等かそれ以下となる．

したがって，加法定理が適用でき入力値が m 桁精度の関数の n 桁精度の関数値の計算量は，入力値が $O(1)$ 桁の有理数の n 桁精度の関数値の計算量の $\log_2 m$ または $\log_2 n$ 倍かそれ以下となることが分かる．

また入力値が $O(1)$ 桁の有理数で，$O(n)$ の項数の計算が必要な級数関数で表現される n 桁精度関数値の計算量 $O(T(n))$ は，$O(M(n)\cdot(\log_2 n)^2)$ 以下となることを 3 章で説明した．

このように加法定理が適用でき，かつ級数で表現される関数は入力値が n 桁精度で，n 桁精度の関数値を計算する計算量は $O(M(n)\cdot(\log_2 n)^3)$ 以下となる．

5. 並列化と結果の再利用

本 DRM 法は入力値 X を上位桁から複数個の有理数に分割し，加法定理で各分割に対応する関数値から最終的に求める関数値を計算する部分と，トーナメント有理数化処理で各分割ごとの入力値に対応する関数値を計算する部分から構成される．

2 章で説明したトーナメント有理数化処理では，各

段でのトーナメント有理数化の計算は完全に独立であり並列化できる．さらに，加法定理を使用して入力値を分割した各関数は互いに独立であり，分割関数ごとに並列計算可能である．

計算結果の再利用性に関しては，トーナメント有理数化処理は有理数で表現しているため，最終段の除算による実数化を除き，正確な値で表現されている．そのため，計算桁数を増加する場合は，増加する前に計算した項数分の級数の和として作成した有理数はそのまま使用でき，追加する桁数に対応する部分以降の項の級数の有理数化処理を追加実行すればよい．

また，入力値 X の桁数 n が増加した場合も，上位桁から複数個の有理数に分割して各分割ごとに関数値を計算しているため，それまでにトーナメント有理数化処理で計算した有理数は有効に再利用可能である．

6. 関連研究

提案したDRM法を構成する2つの方法のうち，最初のトーナメント有理数化処理に関するものは文献1), 6)∼8) に関連研究がある．一方，入力値を有理数に分割して加法定理を使用しトーナメント有理数化処理と結合する方式の提案はほかに見当たらない．なお一般的な分割統治法が適応できる計算で，トーナメント方式による計算量の $O(n\log_2 n)$ への削減と並列化適応性については1981年のSasakiらの論文[9]に示されている．

Haibleらの論文[6]および右田らの論文[8]は入力値の精度が $O(1)$ 桁に限定されており，後らの論文[2]のように加法定理と結合して多数桁関数システムとして閉じることは考慮されていない．

7. まとめ

n 桁の乗算の演算量を $M(n)$ とするとき三角関数や指数関数および誤差関数等の級数で表現される関数を n 桁の精度で求める際は，提案したDRM法を使用して計算量が削減できることを示した．

提案したDRM法は2つの方法で構成される．1つは入力値の精度が $O(1)$ 桁の有理数の場合に，級数に展開される関数で n 桁精度の関数値計算における計算量を $O\left(M(n)\cdot(\log_2 n)^2\right)$ 以下とする方法である．もう1つは加法定理が適用できる関数の多数桁計算で，入力値を上位桁から分母の桁数が $\alpha, 2\alpha, 4\alpha, \cdots, 2^{p-1}\alpha$ 桁ずつの有理数に分割し，各分割した関数値の演算量を $T(n)$ とするとき，入力が n 桁精度で，n 桁精度の関数値の計算量は $O\left(T(n)\cdot\log_2 n\right)$ とする方法である．この2つの方法を結合して，入力値が n 桁精度の場合に n 桁精度の関数値計算の計算量を $O\left(M(n)\cdot(\log_2 n)^3\right)$ 以下に削減するのがDRM法である．

本DRM法は連分数で表現される関数値の多数桁計算にも，級数で表現される関数と同様に適用可能である（付録A.3参照）．また，2進10進変換に代表される多数桁の基底変換にも適用可能である（付録A.4参照）．

本DRM法は $O(1)$ 桁の入力に対する多数桁精度を必要とする関数値計算で，Brentのアルゴリズム[3]と同一の計算量を持つが，Brentのアルゴリズムには示されていない誤差関数のように特殊関数でも級数で展開される関数に適用可能である．そのため適用可能な関数の範囲が広く計算方法が単純で，多くの関数値計算まで含めた多数桁計算システムの構築に有用である．また，自然な並列化が可能であり，計算桁数を増加するとき計算済みの有理数が再利用可能な点，さらにBrentのアルゴリズムのように複数の複雑な関係式を使用して計算するのではなく，単純に級数展開の公式をそのまま適用できるため分かりやすい点が特長である．

今後の課題として，DRM法に基づく高速高精度な数学関数計算パッケージの作成と性能評価がある．

参考文献

1) 後　保範：逆数型無限級数の n 桁計算の演算量を削減する前処理方式，京大数理研予稿集，数値計算における前処理の研究，p.9 (1998).
2) 後　保範，金田康正，高橋大介：無限級数に基づく多数桁計算の演算量削減を実現する分割有理数化法，京都大学数理解析研究所講究録，No.1084, pp.60–71 (1999).
3) Brent, R.P.: Fast Multiple-Precision Evaluation of Elementary Functions, *J. ACM*, Vol.23, pp.242–251 (1976).
4) Chudnovsky, D.V. and Chudnovsky, G.V.: Approximations and Complex Multiplication According to Ramanujan, *Ramanujan Revisited*, Andrews, G.E., Askey, R.A., Berndt, B.C., Ramanathan, K.G. and Rankin, R.A. (Eds.), pp.375–396 and 468–472, Academic Press Inc., Boston, MA (1988).
5) Knuth, D.E.: *The Art of Computer Programming, Vol.2: Seminumerical Algorithms*, 3rd edition, Addison-Wesley, Reading, MA (1997).
6) Haible, B. and Papanikolaou, T.: Fast multiprecision evaluation of series of rational numbers, Technical Report No.TI-7/97, pp.1–15, Darmstadt University of Technology, http://www.informatik.tu-darmstadt.de/TI/Mitarbeiter/papanik/ (1997).

7) Borwein, J.M. and Borwein, P.B.: *Pi and the AGM – A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity*, Wiley, New York (1987).
8) 右田剛史，天野　晃，浅田尚紀，藤野清次：級数の集約による多倍長数の計算法と π の計算への応用，情報処理学会研究報告，98-HPC-74, pp.31–36 (1998).
9) Sasaki, T. and Kanada, Y.: Parallelism in Algebraic Computation and Parallel Algorithms for Symbolic Linear Systems, *Proc. 1981 ACM Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pp.160–167 (1981).

付　　録

A.1 計算桁数 n と級数の項数 $q(n)$ の関係

級数に展開される関数の関数値を B 進 n 桁精度で計算するときに必要な項数 $q(n)$ と n の関係式を示す．

(a)　級数の係数が指数的に減少する場合

これは指数関数，三角関数等の場合である．

入力値を X とすると，計算項数 $q(n)$ と計算桁数 n の関係式は次のようになる．

$$O\left((q(n)!)\cdot X^{-q(n)}\right)=O(B^n)$$

n が大きい場合，$q(n)!$ は Stirling の公式により $\sqrt{2\pi}\cdot q(n)^{q(n)+\frac{1}{2}}\cdot e^{-q(n)}$ と近似される．したがって $q(n)$ と n の関係は次のようになる．

$$O\left(\sqrt{2\pi}\cdot q(n)^{q(n)+\frac{1}{2}}\cdot e^{-q(n)}\cdot X^{-q(n)}\right)$$
$$=O\left(q(n)^{q(n)}\cdot (e\cdot X)^{-q(n)}\right)=O(B^n)$$

これから次式となる．

$$O\left(q(n)\cdot(\log_B q(n)-\log_B(e\cdot X))\right)=O(n)$$

X と e は定数であるため，下記が成立する．

$$O\left(q(n)\cdot\log_B q(n)\right)=O(n)$$

(b)　級数の係数が逆数的に減少する場合

これは対数関数，逆三角関数等の場合である．ここでは係数が減少しない最悪のケースも同じであり，評価は最悪のケースで行う．

入力値を X（対数関数の場合は $1+X$）とすると，計算項数 $q(n)$ と計算桁数 n の関係式は次のようになる．

$$O\left(X^{-q(n)}\right)=O(B^n)$$

これから次式となる．

$$O\left(-q(n)\cdot\log_B X\right)=O(n)$$

X は 1 より小さい定数なので次式が成立する．

$$O\left(q(n)\right)=O(n)$$

A.2 級数関数 $f\left(\frac{1}{B^{2^k\alpha}}\right)$ の n 桁精度計算の演算量 $O(T_k(n))$

加法定理を使用するため，上位桁から B 進 α 桁と，$2^k\alpha$ 桁のそれぞれに分割した場合の各々の n 桁精度計算の演算量を比較する．

級数関数 $f\left(\frac{1}{B^{\alpha}}\right)$ の計算項数を q，計算量を $O(T_0(n))$ とし，$f\left(\frac{1}{B^{2^k\alpha}}\right)$ の計算項数を r，計算量を $O(T_k(n))$ とする．

評価を単純化するため係数が指数的に減少する場合として $f(X)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{X^l}{l!}$ を，係数が減少しない場合として $f(X)=\sum_{l=0}^{\infty}X^l$ を考える．

(a)　級数の係数が指数的に減少する場合

入力値の 1 項あたりの桁数は $f\left(\frac{1}{B^{\alpha}}\right)$ の計算で $\alpha+\log_B q$ となり，$f\left(\frac{1}{B^{2^k\alpha}}\right)$ の計算では $2^k\alpha+\log_B r$ となるため次式が得られる．

$$O(T_0(n))$$
$$=O\left(\sum_{l=1}^{\lceil\log_2 q\rceil}2^{-l}q\cdot M(2^l\cdot(\alpha+\log_B q))\right)$$
$$=O\left(\sum_{l=0}^{\lceil\log_2 q\rceil-1}2^{l}\cdot M(2^{-l}q\cdot(\alpha+\log_B q))\right)$$
$$O(T_k(n))$$
$$=O\left(\sum_{l=0}^{\lceil\log_2 r\rceil-1}2^{l}\cdot M(2^{-l}r\cdot(2^k\alpha+\log_B r))\right)$$

関数値計算の入力値が α 桁と $2^k\alpha$ 桁の各々の計算項数 q と r および計算桁数 n との関係は下記のようになる．

$$O\left((q!)\cdot(B^{\alpha})^q\right)$$
$$=O\left((r!)\cdot(B^{2^k\alpha})^r\right)$$
$$=O\left(B^n\right)$$

これに $q!$，$r!$ に Stirling の近似公式を適用すると次式が得られる．

$$O((q\cdot B^{\alpha})^q)=O((r\cdot B^{2^k\alpha})^r)$$
$$O(q\cdot(\alpha+\log_B q))=O(r\cdot(2^k\alpha+\log_B r))$$
$$O\left(M(2^{-l}q\cdot(\alpha+\log_B q))\right)$$
$$=O\left(M(2^{-l}r\cdot(2^k\alpha+\log_B r))\right)$$
$$O\left(\sum_{l=0}^{\lceil\log_2 q\rceil-1}2^{l}\cdot M(2^{-l}q\cdot(\alpha+\log_B q))\right)$$

$$\geq O\left(\sum_{l=0}^{\lceil \log_2 r\rceil -1} 2^l \cdot M(2^{-l}r \cdot (2^k\alpha + \log_B r))\right)$$

したがって，$O(T_0(n)) \geq O(T_k(n))$ となる．

(b) 級数の係数が逆数的に減少する場合（係数が減少しない場合を含む）

関数値計算のの入力値が α 桁と $2^k\alpha$ 桁の各々の計算項数 q と r および計算桁数 n との関係は下記のようになる．

$$O\left((B^{\alpha})^q\right) = O\left((B^{\alpha 2^k})^r\right) = O\left(B^n\right)$$

この式より $O(q) = O(2^k r)$ となる．

一方，$O(T_0(n))$ と $O(T_k(n))$ は次のようになる．

$$O(T_0(n)) = O\left(\sum_{l=0}^{\lceil \log_2 q\rceil -1} 2^l \cdot M(2^{-l}q\alpha)\right)$$

$$O(T_k(n)) = O\left(\sum_{l=0}^{\lceil \log_2 r\rceil -1} 2^l \cdot M(2^{-l}r2^k\alpha)\right)$$

したがって，$q > r$ を考慮すると $O(T_0(n)) \geq O(T_k(n))$ となる．

A.3 連分数の有理数化処理

関数値 f が q 項までの連分数

$$f = \cfrac{a_{0,1}}{b_{0,1} + \cfrac{a_{0,2}}{b_{0,2} + \cfrac{a_{0,3}}{b_{0,3} + \cdots \cfrac{a_{0,q-2}}{b_{0,q-2} + \cfrac{a_{0,q-1}}{b_{0,q-1} + \cfrac{a_{0,q}}{b_{0,q}}}}}}}$$

に展開されるとする．これを以下のように，トーナメント方式を適用して 2 項ずつ通分処理で有理数にする．1 段目の有理数化処理は下記のようになる．

$$\frac{a_{1,l}}{b_{1,l}} \equiv \cfrac{a_{0,2l-1}}{b_{0,2l-1} + \cfrac{a_{0,2l}}{b_{0,2l} + \cfrac{a_{1,l+1}}{b_{1,l+1}}}}$$

$$= \frac{T_{1,l}a_{1,l+1} + U_{1,l}b_{1,l+1}}{V_{1,l}a_{1,l+1} + W_{1,l}b_{1,l+1}}$$

$$T_{1,l} \equiv a_{0,2l-1}, \quad U_{1,l} \equiv a_{0,2l-1}b_{0,2l}$$

$$V_{1,l} \equiv b_{0,2l-1}, \quad W_{1,l} \equiv a_{0,2l} + b_{0,2l-1}b_{0,2l}$$

ここで $l = 1, 2, \cdots, \lceil q/2\rceil$，$a_{1,\lceil q/2\rceil+1} = 0$，$b_{1,\lceil q/2\rceil+1} = 1$ で p が奇数なら $a_{0,p+1}$，$b_{0,p+1}$ はともに 0 と仮定する．

また，p 段目の有理数化処理は 2 回漸化式を使用して下記のようになる．

$$\frac{a_{p,l}}{b_{p,l}} \equiv \frac{a_{p-1,2l-1}}{b_{p-1,2l-1}}$$

$$= \frac{T_{p-1,2l-1}a_{p-1,2l} + U_{p-1,2l-1}b_{p-1,2l}}{V_{p-1,2l-1}a_{p-1,2l} + W_{p-1,2l-1}b_{p-1,2l}}$$

$$\begin{aligned}
&= \big(T_{p-1,2l-1}(T_{p-1,2l}a_{p-1,2l+1} \\
&\quad + U_{p-1,2l}b_{p-1,2l+1}) \\
&\quad + U_{p-1,2l-1}(V_{p-1,2l}a_{p-1,2l+1} \\
&\quad + W_{p-1,2l}b_{p-1,2l+1})\big) \\
&\quad \div \big(V_{p-1,2l-1}(T_{p-1,2l}a_{p-1,2l+1} \\
&\quad + U_{p-1,2l}b_{p-1,2l+1}) \\
&\quad + W_{p-1,2l-1}(V_{p-1,2l}a_{p-1,2l+1} \\
&\quad + W_{p-1,2l}b_{p-1,2l+1})\big) \\
&\equiv \frac{T_{p,l}a_{p-1,2l+1} + U_{p,l}b_{p-1,2l+1}}{V_{p,l}a_{p-1,2l+1} + W_{p,l}b_{p-1,2l+1}} \\
&= \frac{T_{p,l}a_{p,l+1} + U_{p,l}b_{p,l+1}}{V_{p,l}a_{p,l+1} + W_{p,l}b_{p,l+1}}
\end{aligned}$$

$$T_{p,l} \equiv T_{p-1,2l-1}T_{p-1,2l} + U_{p-1,2l-1}V_{p-1,2l},$$
$$U_{p,l} \equiv T_{p-1,2l-1}U_{p-1,2l} + U_{p-1,2l-1}W_{p-1,2l}$$
$$V_{p,l} \equiv V_{p-1,2l-1}T_{p-1,2l} + W_{p-1,2l-1}V_{p-1,2l},$$
$$W_{p,l} \equiv V_{p-1,2l-1}U_{p-1,2l} + W_{p-1,2l-1}W_{p-1,2l}$$

ここで，$p = 2, 3, \cdots, \lceil \log_2 q\rceil$，$l = 1, 2, \cdots, \lceil q/2^p\rceil$

トーナメント有理数化の p 段では $T_{p,l}$，$U_{p,l}$，$V_{p,l}$，$W_{p,l}$ と $a_{p,\lceil q/2^p\rceil}$，$b_{p,\lceil q/2^p\rceil}$ を計算する．最終段の $\dfrac{a_{\lceil \log_2 q\rceil,1}}{b_{\lceil \log_2 q\rceil,1}}$ で結果の有理数が求まる．

A.4 多数桁の基底変換

多数桁の基底変換は，DRM 法を適用して各段で変換桁数を倍増させることを繰り返して実行できる．p 進数から q 進数に基底変換するには，与えられた自然数 X を

$$X = \sum_{k=0}^{m-1} A_{k,0}p^k,$$
$$m = \lceil \log_p X\rceil, \quad 0 \leq A_{k,0} < p$$

なる表現から

$$X = \sum_{k=0}^{n-1} b_{k,0}q^k, \quad n = \lceil \log_q X\rceil, \quad 0 \leq b_{k,0} < q$$

に変換すればよい．

適当な整数を用いると α を $p^{\alpha} < q < p^{2\alpha}$ または $p < q^{\alpha} < p^2$ とできるため，該当する p^{α}，q^{α} を p，q と以下再表示し，項数 m も 2 のベキ乗 $(m = 2^r)$ と仮定しても一般性は失われない．

多数桁の基底変換は下記の処理を j が 1 から r まで繰り返すことで実行できる．

$$X = \sum_{k=0}^{2^{r-j+1}-1} A_{k,j-1}p^{2^{j-1}k}$$

$$= \sum_{k=0}^{2^{r-j}-1} \left(A_{2k,j-1} + A_{2k+1,j-1}p^{2^{j-1}}\right)p^{2^j k}$$

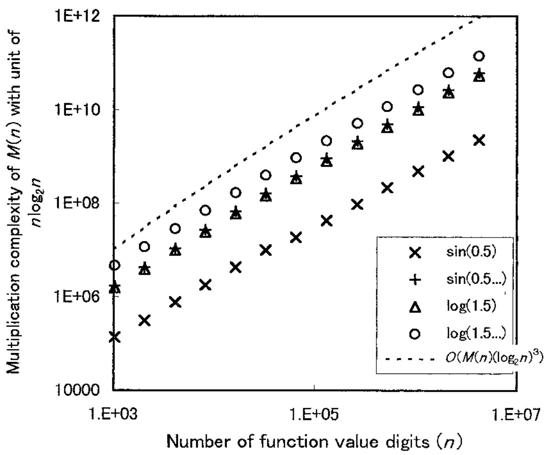

図1　DRM 法の sin 関数と log 関数への適応結果
Fig. 1　Results of DRM method for sin and log functions.

$$\equiv \sum_{k=0}^{2^{r-j}-1} A_{k,j} p^{2^j k}$$
$$\equiv \sum_{k=0}^{2^{r-j}-1} \left(B_{2k,j} + B_{2k+1,j} q^{2^{j-1}}\right) p^{2^j k}$$
$$\equiv \sum_{k=0}^{2^{r-j}-1} \left(\sum_{i=0}^{2^j-1} b_{i+2^{r-j}k,r-j} q^i\right) p^{2^j k}$$

ここで，j 段では下記の計算をする．

$$W_{k,j} = A_{2k,j-1} + A_{2k+1,j-1} p^{2^{j-1}}$$
$$B_{2k+1,j} = \lfloor \frac{W_{k,j}}{q^{2^{j-1}}} \rfloor,$$
$$B_{2k,j} = W_{k,j} - B_{2k+1,j} q^{2^{j-1}},$$
$$k = 0, 1, 2, \cdots, 2^{r-j} - 1$$

A.5　DRM 法の sin 関数と log 関数への適応結果

DRM 法を sin 関数と log 関数に適用した場合の結果を**図1**に示す．図1はDRM法を適用して10進 n 桁の関数値を計算したときに使用した乗算の合計計算量を示す．10進 n 桁の乗算の計算量 $M(n)$ とのオーダーの比較をするため，縦軸は $M(n)$ の計算量を $n \log_2 n$ とする単位で示す．比較のため $O(M(n)(\log_2 n)^3)$ も点線で示す．sin(0.5) および log(1.5) はそれぞれ $O(1)$ 桁の入力値0.5と1.5を与えて，横軸に示す10進 n 桁の関数値を計算することを示す．一方，sin(0.5..) および log(1.5..) はそれぞれ n 桁の入力値 $0.5\ldots$ と $1.5\ldots$ を与えて同一桁の関数値を計算することを示す．

これより，4 関数の計算量のオーダーはいずれも $O(M(n)\ (\log_2 n)^3)$ 以下であることが分かる．したがって，計算量の理論的オーダーをいずれも満足している．

(平成11年6月7日受付)
(平成12年3月2日採録)

後　保範（正会員）

1945年生．1967年早稲田大学理工学部数学科卒業．同年（株）日立製作所入社．以来，スーパーコンピュータ用数値計算ライブラリの開発および応用技術の開発に従事．現在，同社エンタープライズサーバ事業部に勤務．早稲田大学教育学部非常勤講師．

金田　康正（正会員）

1949年生．1973年東北大学理学部物理第二学科卒業．1978年東京大学大学院理学系研究科博士課程修了．理学博士．1978年名古屋大学プラズマ研究所助手，1981年東京大学大型計算機センター助教授，同教授を経て現在東京大学情報基盤センター教授．その間英国ケンブリッジ大学計算機研究所客員研究員，名古屋大学プラズマ研究所客員助教授，核融合科学研究所客員助教授．昭和58年度（欧文）および平成10年度（邦文）情報処理学会論文賞受賞．平成6年度情報処理学会 Best Author 賞受賞．著書「π のはなし」（東京図書），日本応用数理学会，プラズマ・核融合学会，ACM，SIAM 各会員．研究テーマは「大規模数値計算」，「知識発見」および「研究の研究」．円周率計算桁数に関する世界記録を保持．

高橋　大介（正会員）

1970年生．1991年呉工業高等専門学校電気工学科卒業．1993年豊橋技術科学大学工学部情報工学課程卒業．1995年同大学大学院工学研究科情報工学専攻修士課程修了．1997年東京大学大学院理学系研究科情報科学専攻博士課程中退．同年同大学大型計算機センター助手．1999年同大学情報基盤センター助手．2000年埼玉大学大学院理工学研究科情報数理科学専攻助手．博士（理学）．並列数値計算アルゴリズムに関する研究に従事．平成10年度情報処理学会山下記念研究賞，平成10年度情報処理学会論文賞各受賞．日本応用数理学会，ACM，SIAM 各会員．