曲面一様ドット表示にもとずく体積集合演算の可視化

3D−2

小出　昭夫
日本アイ・ビー・エム株式会社東京基礎研究所

1．はじめに

曲面上に一様に散布したドットの集まりで物体の表面を可視化する方法は，描画の高速性と半透明効果の有用性のため，会話的分子グラフィックスシステムでの基本的表示法となっている。ここでは，まず，最適のドット散布法を平面格子から曲面への等面積マッピングとして考察する。次に，ドット散布表示をもちい，物体の任意の集合演算でできる３次元領域の表面の可視化手法を与える。例えば，V_1，V_2，V_3，V_4を構成物体とするとき，集合演算$L=(V_1\cap V_2)\cup(V_3\cap V_4^c)$で新しい物体が定まる。この表面上のドットを効率的に求める方法について述べる。

2．曲面上一様ドット散布手法

曲面上のドット散布という単純な可視化手法が２次元のＣＲＴを通してユーザに立体感を与える理由として次が考えられる。(1)描画の高速性のために動画を通して３次元構造を把握できる。(2)ドット密度の変化により曲面と視線とのなす角の変化が把握できる。従って最適なドット散布表示法とは，描画の高速性を保ったまま，曲面上にドットを等密度で等方に散布するものと定義できる。

まず，等方性を無視した簡単な等密度ドット散布法を考えよう。表面が三角形の多面体に分割されており，各三角形の接続関係が求められているとする。どれか一つ三角形を選び，ドットをその上に置く。次に隣接する三角形上に順にドットを散布する。このとき，処理した三角形の面積の総和を常に求め，散布したドットの総数との比が一定になるよう，次の三角形でのドット数を定める。この手法では，密度の誤差が隣接三角形のドット数を通して訂正されるのでかなりの精度で等密度が保たれる。しかしながら，美観は細長い三角形が現れる頻度が高いとき壊される。これが等方の問題である。

平面で等密度に点を散布するには規則的な格子点上にドットを置けばよい。このとき最も等方な格子は６回対称軸をもつ六方格子である。曲面上のドット散布は，この平面上の六方格子のマッピングとみなせる。等密度の条件は等面積マッピングで実現できる。等方の条件はこのとき縦横のマッピング比として定量的に検定できる。また等方性の定性的検定基準として隣接点の個数も使用できる。

例として，平面（直交座標系x,y）から球面（極座標系θ，ϕ）へのマッピング

$$(x,y)=(2\sin(\theta/2)\cos\phi,\ 2\sin(\theta/2)\sin\phi) \qquad [1]$$

を考えよう。このとき，等密度性は

$$dx\ dy = \sin\theta\, d\theta\, d\phi \qquad [2]$$

より保証される。一方，等方性は

$$dx^2+dy^2 = \cos^2(\theta/2)d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2/\cos^2(\theta/2) \neq d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2 \qquad [3]$$

と破られ，周辺部での縦横比のゆがみは$\cos^2(\theta/2)$で起きる。半球の周辺部では２倍にも達する。このような歪みはどのようなマッピングを採用するとも面が曲率をもつ限り一般に生じ，パッチが必要となる。

球面の分割には大円を利用したものと緯度経度線を利用したものが考えられる。大円による球面三角形分割では，すべてのドットに対し隣接点の個数が５個以上になるためには正２０面体以上を用いる必要がある。大円がなす角がA,B,Cの三角領域の面積が

$$S = A + B + C - \pi \qquad [4]$$

であることを用いて等面積マッピングを具体的に作成できる。しかしながら，厳密な等面積マッピングによる大円三角パッチはドット生成の負荷が大きいので，実用的には多面体上の点を球面上に延長するほうが良い。

緯度経度方式では，図１のような簡単な分割で等面積マッピングのパッチが作成できる。赤道まわりでは

$$(x,y) = (\phi/c,\ 2c\sin^2(\theta/2)) \qquad [5]$$

で六方格子の矩形領域にマッピングする。両極のまわりでは経度線により６個の三角領域に分割し，

$$(x,y) = (a\sin(\theta/2)(\phi-d),\ b\sin(\theta/2)) \qquad [6]$$

Visualization of Volume Logical Operation by Dot Surface
Akio Koide
Tokyo Research Laboratory, IBM Japan Ltd.

でおのおのの領域を六方格子の三角領域にマッピングする。ここでａ，ｂは球面の三角領域を六方格子にマッピングすることで決まる定数であるのに対し，ｃは等面積マッピングの条件だけでは任意定数になる。従って赤道から上下にずらした緯度線上で等方になるようｃを選択することにより，ゆがみの最大値を小さく抑えることができる。実際のプログラムでは，極のまわりでは緯度線上のドット数を等差数列的に増加させ，赤道のまわりの領域では緯度線上に同数のドットを半周期ずらして生成するだけですむ。図２がその出力例である。

この緯度経度パッチ方式は図３のように簡単に一般の回転体に拡張できる。回転軸からの距離の変化が激しい領域では円周上のドット数を等差数列的に変え，変化の緩やかな領域ではドット数を一定にし半周期ずらす。ドットの並ぶ円周の間隔を等面積マッピングという条件より動的に求める。

３．体積論理演算の可視化手法

可視化したい物体が単純な物体（プリミティブ）の集合演算で構成されることがよくある。特に，分子グラフィックスでは，薬品の作用部位や副作用部位を同定するために，複数の分子の集まりに対し，共通集合，和集合，差集合の一連の演算を行ない，その表面を可視化するという機能が要求される。

物体表面が外部と内部との境界で定義されることから，ドット散布表示では，この問題を次のようにして一般的に解くことができる。構成要素の物体表面上の点が集合演算の結果の物体の表面上にある必要十分条件は，その点がほんの少し構成要素物体の内部にずれたとき演算結果の物体の内部に属し，ほんの少し外部にずれたとき演算結果の物体の外部に属することである。

この必要十分条件をプログラミング可能な形に言い換えよう。集合演算式Ｌを論理演算式とみなす。共通集合は論理積&&，和集合は論理和||，差集合は論理否定！に置き換える。例えば，集合演算$L=(V_1\cap V_2)\cup(V_3\cap V_4^c)$は，$L=(V_1\&\&V_2)||(V_3\&\&(!V_4))$とする。この置き換えのもとに，構成要素物体$V_i$の表面上の点pが集合演算結果の物体Ｌの表面上にある必要十分条件は，判定式

$$L(V_i=T)\&\&\ !L(V_i=F) \qquad [7]$$

が真の値をとることである。ここで，$L(V_i=T)$は，論理演算式ＬのV_iに真を代入し，$L(V_i=F)$は，論理演算式ＬのV_iに偽を代入し，他の構成要素V_jについては点pがその内部に含まれるか否かで真偽を代入するものとする。判定式[7]を各ドットに対しインタプリティブに評価することにより，ユーザの指定する任意の集合演算式に対し，その結果の物体の表面を可視化することができる。

次に，この判定式[7]の評価の効率化を考えよう。構成要素物体V_iを固定したとき，他の構成要素V_jの真偽の値を除き，判定式は形式的に同じ形をしている。最も単純な効率化技法は，判定式[7]をV_jのすべての真偽の組合せについて評価し，表を持つことであろう。しかしながら，この方法は構成物体の数が少ないときのみ実用的である。従って，ここでは判定式[7]の簡約化について考察する。

任意の論理式は演算木に置き換えできる。このとき簡約の戦略には，一般に木の末端（下側）からと木の頂点からとの二方向が考えられる。末端からの手法としては，$V_j=V_j\&\&T$，$T=V_j||T$，$F=V_j\&\&F$，$V_j=V_j||F$などがある。しかし判定式[7]の対称性のため，頂点からの簡約の方が効率が良い。

論理演算式Ｌが$L=L_1\&\&L_2$または$L=L_1||L_2$と分解できるとする。ここでL_1はV_iを含まないとする。このとき，次の簡約（置き換え）ができる。$L=L_1\&\&L_2$なら，式[7]は，$L_1\&\&(L_2(V_i=T)\&\&\ !L_2(V_i=F))$となる。$L=L_1||L_2$なら，$!L_1\&\&(L_2(V_i=T)\&\&\ !L_2(V_i=F))$となる。置き換えの結果，同じ形の対称性が現れるので，論理演算式Ｌの分解が次々とできる限り同じやり方で簡約を続行できる。証明は，Ｌの分解を式[7]に代入し分配則と$F=L_1\&\&!L_1$を使うことにより簡単に得られる。

プログラム全体の構成と流れは次のようになる。ユーザの入力した論理演算式（文字列）をリスト構造の論理演算式に変換する。描画の段階で，各構成要素の物体を順に取り出し，判定式[7]の簡約を実行し，簡約された判定式を構成要素の表面の各ドットについて評価し，真ならばドットを描画する。簡約については，まず演算木の頂点から前記の手法で簡約し，それが適用できなくなったとき，末端から簡約を行う。

４．おわりに

曲面ドット散布表示のためのドット最適配置の問題と体積集合演算の可視化について論じた。ドットの配置の手法としては規則的格子だけでなくランダム性導入の効果についても今後検討する必要がある。

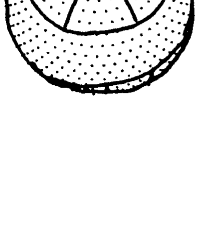
図１

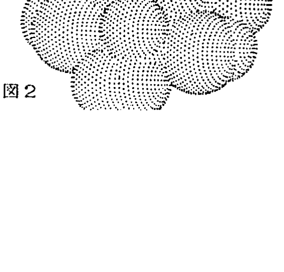
図２

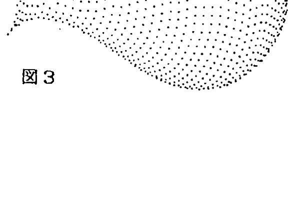
図３