

微分幾何構造に基づいた曲面ブレンディング

3 D-1

木村 昌弘 新谷 幹夫

NTT ヒューマンインタフェース研究所

1 はじめに

一般に、複雑な曲面形状は、いくつかのより単純な曲面をつなぎあわせることにより構成される。曲面を接続するとき、多くの場合、滑らかな接続が機能性や美的理由により望まれる。したがって、与えられた曲面の間を滑らかに接続する曲面(ブレンド曲面)を計算することは、CAGD (computer aided geometric design) の重要な課題の一つである。

曲面ブレンディングにおいて、形状操作は最も重要な研究課題の一つである。通常、形状操作は、ブレンド曲面が近くを通る点や、境界曲線でのクロス接ベクトルの大きさ等の様なブレンド曲面の形状を大雑把に制御するパラメータを導入することにより行なわれている。

本報告では、新しい曲面ブレンディング法を提案する。本手法は、与えられたパラメトリック曲面 A, B の間を連続的に接続するパラメトリック曲面 X が指定されたとき、この初期曲面 X の平均曲率という幾何構造に基づいた G^1 ブレンド曲面を生成する。初期曲面 X の平均曲率に基づいた G^1 ブレンド曲面として、曲面 X の幾何構造から定義される変形エネルギー E を最小にする G^1 ブレンド曲面が採用される。これにより、デザイナーが初期曲面を指定し、それに本手法が適用されることによって、ブレンド曲面の形状操作が為されるのである。

2 G^1 連続な接続

本手法では、初期曲面 X をその法線方向に変形することにより、 G^1 ブレンド曲面 X' を生成する(図1参照)。適当なパラメータの変換により、曲面 A, B, X は、それぞれ、1対1の C^3 写像で Jacobian の階数が至る所2である様な写像 $A: [a_1', a_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^3, B: [b_1, b_1'] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^3, X: [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ の像として表現されているとする。ただし、 $A(a_1, u_2) = X(a_1, u_2), B(b_1, u_2) = X(b_1, u_2), (a_2 \leq u_2 \leq b_2)$ である。曲面 A, B, X のパラメータ表現を通して、曲面 A, B, X 上の量を、それぞれ、 $[a_1', a_1] \times [a_2, b_2], [b_1, b_1'] \times [a_2, b_2], [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ 上の量と同一視することとする。また、 \mathbb{R}^3 の標準内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ と書く。曲面 A, B, X の単位外法ベクトル場を、それぞれ N_A, N_B, N_X とする。

G^1 ブレンド曲面 X' は、写像 $X + \phi N_X$ の像として表現される。ここに、 ϕ は、 X 上の、すなわち $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ 上の C^2 関数である。 $C^2(X)$ の部分集合 \mathcal{F} を次で定義する：

$$\mathcal{F} = \{ \phi \in C^2(X); \phi(a_1, u_2) = \phi(b_1, u_2) = 0, \frac{\partial \phi}{\partial u_1}(a_1, u_2) = h_A(u_2), \frac{\partial \phi}{\partial u_1}(b_1, u_2) = h_B(u_2), \forall u_2 \in [a_2, b_2] \}$$

ここに、

$$h_A(u_2) = - \frac{\langle \frac{\partial X}{\partial u_1}(a_1, u_2), N_A(a_1, u_2) \rangle}{\langle N_X(a_1, u_2), N_A(a_1, u_2) \rangle},$$

$$h_B(u_2) = - \frac{\langle \frac{\partial X}{\partial u_1}(b_1, u_2), N_B(b_1, u_2) \rangle}{\langle N_X(b_1, u_2), N_B(b_1, u_2) \rangle}$$

である。このとき、 $\phi \in C^2(X)$ に対して、曲面 $(X + \phi N_X)([a_1, b_1] \times [a_2, b_2])$ が曲面 A, B と G^1 連続に接続するための必要十分条件は、 $\phi \in \mathcal{F}$ である (cf. [2])。

3 変形エネルギー

初期曲面 X の写像 $X + \phi N_X$ による変形の変形エネルギー $E(\phi)$ を、

$$E(\phi) = \int_X (\Delta \phi)^2 dA$$

によって定義する。ここに、 Δ は Riemann 多様体 $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ の Laplacian、 dA はその面積要素である (cf. [1])。 X 上 $|\phi|, |\text{grad} \phi|$ が十分小のとき (grad の定義は、[1] を参照)、すなわち、変形が微小変形であるとき、変形エネルギー E は、次の様な特徴を持つ。まず、この変形 ϕ による曲面の平均曲率の変化量を Riemann 多様体 $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 上の関数と見たとき、その L^2 ノルムは、変形エネルギー $E(\phi)$ の4分の1により近似される (cf. [2])。したがって変形エネルギー E は、初期曲面 X の平均曲率と変形された曲面の平均曲率の全体的な差異を測定しているといえる。次に、変形エネルギー E は、次の様な物理的解釈を持つ。初期曲面 X を境界の固定された等質的弾性膜の平衡状態の曲面と見なす。このとき、この変形 ϕ により変形された膜の復元力を Riemann 多様体 $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 上のベクトル場と見たとき、その L^2 ノルムは、変形エネルギー $E(\phi)$ により近似される (cf. [2])。したがって変形エネルギー E は、変形された膜の復元力の大きさを測定しているといえる。

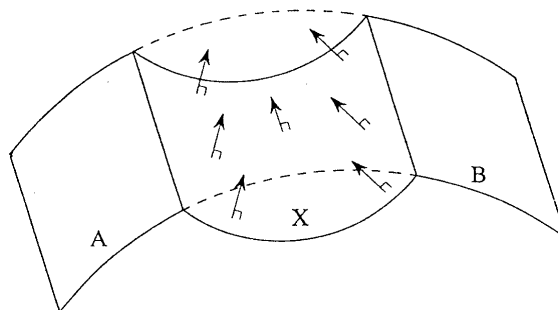


図1: ブレンド曲面と変形

4 許容空間

変形エネルギー E を最小にする G^1 ブレンド曲面を見つけるのは、一般に困難である。“physically-based modeling” において行なわれた様に、許容するオペレーション (例えば、平行移動、回転、変形など) の自由度を制限し、制限された空間の中でオペレーションを最適化することは、しばしば有益である (cf. [3])。したがって、考慮する初期曲面 X の G^1 ブレンド曲面への変形 ϕ を、アフィン空間 \mathcal{F} の適当な有限次元部分空間の元に制限する。考慮する変形のアフィン空間の次元が有限ならば、その中で変形エネルギー E を最小にする変形が唯一存在することが示される (cf. [2])。

我々は、考慮する初期曲面 X の変形を、以下に示す様な \mathcal{F} の有限次元アフィン部分空間 $f_0 + \mathcal{F}_0$ に制限する。ここに、 \mathcal{F}_0 は、初期曲面 X 上の C^2 関数で、境界で導関数も含めて零となる様な双3次スプライン関数からなる有限次元ベクトル空間であり、 f_0 は3次 B スプライン関数を経由して定義される \mathcal{F} の元である。

f_0, \mathcal{F}_0 は具体的には次の様なものである: 4以上の整数 m_1, m_2 に対して、区間 $[a_1, b_1]$ を m_1 等分し、区間 $[a_2, b_2]$ を m_2 等分する。そして、任意の整数 j に対して、 $u_j^{(\mu)} = a_\mu + r_\mu j$ とし

$$B_j^{(\mu)}(u_\mu) = \frac{1}{6r_\mu^3} \sum_{\alpha=0}^4 (-1)^\alpha \binom{4}{\alpha} (u_\mu - u_{j+\alpha}^{(\mu)})_+^3$$

とする。ここに、 $r_\mu = (b_\mu - a_\mu)/m_\mu, \mu = 1, 2$ であり、

$$(s)_+^3 = \begin{cases} s^3 & (s \geq 0) \\ 0 & (s < 0) \end{cases}$$

である。 $f_0 \in \mathcal{F}$ は、次で定義されるものとする:

$$f_0(u_1, u_2) = \frac{b_1 - a_1}{m_1} \{ (-B_{-3}^{(1)}(u_1) + B_{-1}^{(1)}(u_1))h_A(u_2) + (-B_{m_1-3}^{(1)}(u_1) + B_{m_1-1}^{(1)}(u_1))h_B(u_2) \}$$

ベクトル空間 \mathcal{F}_0 は、曲面 A, B と曲面 X の交線が共に開いた曲線の場合は、 $S^{(1)} \otimes S^{(2)}$ としそれらが共に閉じた曲線である場合は、 $S^{(1)} \otimes \bar{S}^{(2)}$ とする。ここに、 $\mu = 1, 2$ に対して、 $S^{(\mu)}$ は、閉区間 $[a_\mu, b_\mu]$ 上の C^2 関数で、各閉区間 $[u_{j-1}^{(\mu)}, u_j^{(\mu)}]$ 上3次の多項式であり、 a_μ, b_μ において微係数も含めて零となるもの全体である。また、 $\bar{S}^{(2)}$ は、閉区間 $[a_2, b_2]$ 上の C^2 関数で、各閉区間 $[u_{j-1}^{(2)}, u_j^{(2)}]$ 上3次の多項式であり、導関数も含めて a_2, b_2 における値が等しいもの全体である。

5 エネルギー最小化

ベクトル空間 \mathcal{F}_0 の基底を $\{\psi_i\}$ とする。例えばそれは、 B スプライン関数 $B_j^{(\mu)}$ を用いて表すことができる。変分原理を用いることにより、アフィン空間 $f_0 + \mathcal{F}_0$ の中で、変形エネルギー E を最小にする変形 ϕ_0 を具体的に計算することができる。それは、

$$\phi_0 = f_0 + \sum_i \lambda_i \psi_i$$

と書くことができる。ここに、各 λ_i は、

$$\lambda_i = - \sum_j c^{ij} \int_X \Delta f_0 \Delta \psi_j dA$$

ただし、 $c_{ij} = \int_X \Delta \psi_i \Delta \psi_j dA$ で、 (c^{ij}) は行列 (c_{ij}) の逆行列である。ゆえに、目的の G^1 ブレンド曲面は、写像 $X + \phi_0 N_X$ の像として得られる。本手法で得られる G^1 ブレンド曲面の例を図2に示す。上図は、左から曲面 A, X, B を表し、下図は、 $m_1 = m_2 = 12$ として本手法を適用した結果を表している。

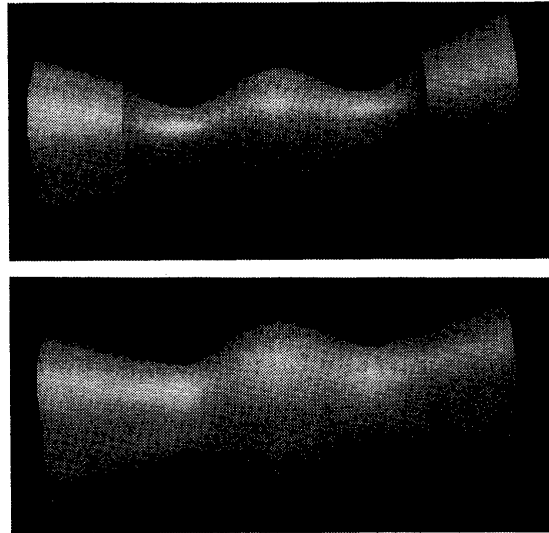


図2: ブレンド曲面の生成例

6 おわりに

新しい曲面ブレンディング手法を提案した。与えられた2曲面間を連続的に接続する初期曲面が指定されたとき、この初期曲面の平均曲率という幾何構造に基づいた G^1 ブレンド曲面を生成することができた。これにより、指定された初期曲面の形状の特徴を反映した G^1 ブレンド曲面が得られた。また、この変形は弾性膜の変形という物理的解釈を持つので、直観的なメンタルモデルを与えることができる。

謝辞

日頃、ご指導をいただき、高野陸男 知能ロボット研究部長、立石和義 主幹研究員、ならびに、知能ロボット研究部諸氏に感謝致します。

参考文献

[1] Chavel, I., *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1984.
 [2] Kimura, M., and Shinya, M., Surface blending based on a differential geometric structure, submitted for publication.
 [3] Witkin, A., Fleischer, K., and Barr, A., Energy constraints on parameterized models, *Computer Graphics*, 21 (1987), 225-232.