3X−4

情報の量に着目した論理の代数的構造とその応用*

○安井 浩之　　向殿政男†
明治大学 理工学部‡

1 はじめに

現在広く用いられている論理代数は「真」を最大元、「偽」を最小元としている。しかし、情報の量に着目すると両者は同等であると考えられる。更に、矛盾律や排中律は「過剰な情報」「情報の不足」を表しているという発想も得られる。
本稿で提案する論理代数は「真」「偽」のほかに、それらを「過剰定義」「未定義」という元として持つ4値の論理代数（ＱＩ論理代数）である。
まず、その代数的構造について示し、その応用として本論理における推論法を示す。さらに、情報の量に着目したファジィ論理の一種であるファジィインターバル論理[1]を参考に本論理をファジィ論理に拡張する。

2 ＱＩ論理の代数的構造

$F = \{U,\ I,\ O,\ C\}$ とする。ここに、半順序関係 $\geq_{QI}$ を図1のハッセ図のように定義する。

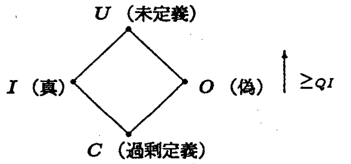

図1: F における半順序関係 $\geq_{QI}$

この半順序関係は情報が不足している方が上であるような半順序関係である。これにより $\cap$, $\cup$, $-$ の各演算を定義する。
ＱＩ論理代数、$QI = \langle F,\ \cap,\ \cup,\ -\rangle$ はブール代数をなしている。

２値ブール代数を
$B = \langle\{0,1\},\ \wedge,\ \vee, \sim\rangle$ とする。
このとき、$B^2 = B \times B$ は以下のようになる。
$\forall[a_F, a_T], [b_F, b_T] \in B^2$ において

$$[a_F, a_T] \wedge [b_F, b_T] = [a_F \wedge b_F, a_T \wedge b_T]$$
$$[a_F, a_T] \vee [b_F, b_T] = [a_F \vee b_F, a_T \vee b_T]$$
$$\sim [a_F, a_T] = [\sim a_F, \sim a_T]$$

また、表1の写像 $f_{iso} : QI \rightarrow B^2$ を定義する。

Lemma 2.1 QI と B^2 は同型である。

２値ブール代数は（論理）関数的に完全であるが QI は完全ではない。
多値ブール代数において $\cap$, $\cup$ のほかに次のような演算 x^a を導入すれば関数的に完全になることが知られている。[2]

$A \in F$	$f_{iso}(A) \in B^2$
U	[1, 1]
I	[1, 0]
O	[0, 1]
C	[0, 0]

表1: 同型写像 f_{iso}

A	$\neg A$
U	U
I	O
O	I
C	C

表2: 演算 $\neg$

$$x^a = \begin{cases} U & x = a \\ C & otherwise \end{cases} \tag{1}$$

このとき任意の論理関数の一般形は

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \bigcup_{\forall(a_1,\cdots,a_n)\in F^n} f(a_1, \cdots, a_n) \cap x_1^{a_1} \cap \cdots \cap x_n^{a_n} \tag{2}$$

となる。
表2に示すの真偽に関する否定の演算 $\neg$ を加えた $QI^{\neg}$ は関数的に完全になる。なぜなら
$x^a = (a \oplus -x) \cap \neg(a \oplus -x)$
但し、$x \oplus y = (x \cap -y) \cup (-x \cap y)$
と定義できるからである。

Definition 2.1 F の元をとる変数 $x_i (i = 1, \cdots, n)$ と QI 上の演算との有限回の結合により構成される論理式をＱＩブール式といい、ＱＩブール式が表現する F^n から F への関数をＱＩブール関数と呼ぶ。

Definition 2.2 関数 $f : F^n \rightarrow F$ が

$$f(\neg x) = \neg f(x) \quad \forall x \in F^n \tag{3}$$

を満たすとき、f を対称関数という。

Theorem 2.1 任意のＱＩブール関数 f_B は対称関数である。

Definition 2.3 関数 $f : F^n \rightarrow F$ において
$f_{x_i}(a) = f(x_1, \cdots, x_i = a, \cdots, x_n)$ とするとき

$$\begin{cases} f_{x_i}(O) \cap f_{x_i}(I) &= f_{x_i}(C) \\ f_{x_i}(O) \cup f_{x_i}(I) &= f_{x_i}(U) \end{cases} \tag{4}$$

であるような変数 x_i を f の情報独立変数とよぶ。

Theorem 2.2 QI 上の任意の関数 $f_{x_i}(a) = f(x_1, \cdots, x_i = a, \cdots, x_n)$ において変数 x_i が情報独立変数であるとき
$\forall a, b \in F$ に対して

$$f_{x_i}(a) * f_{x_i}(b) = f_{x_i}(a * b) \tag{5}$$

$*$ は $\cup$ または $\cap$

*Algebraic structure of logic considering information quantity
†Hiroyuki YASUI, Masao MUKAIDONO
‡School of Science and Technology,Meiji Univ.

Definition 2.4 関数 $f : F^n \to F$ において
$f_{x_i}(a) = f(x_1, \cdots, x_i = a, \cdots, x_n)$ とするとき $\forall a, b \in F$, $a \geq_{QI} b$ に対して

$$f_{x_i}(a) \geq_{QI} f_{x_i}(b) \text{ または } f_{x_i}(b) \geq_{QI} f_{x_i}(a) \tag{6}$$

であるとき、関数 f は変数 x_i に関して単調であるという。

3 ＱＩ論理を用いた推論法の考察

命題論理における推論のようにＱＩ論理における推論について考える。[3]

Definition 3.1 $A, A \to B$ が共に真であるなら、B は真であるような推論法を *modus ponens* という。

modus ponens が成立するためには

$$(A \cap (A \to B)) \to B = I \tag{7}$$

を満たすように → の定義をする必要がある。

J.Lukasiewicz が多値論理のために拡張した含意（表 3(a)）

$$A \to B = \begin{cases} U & B \geq_{QI} A \\ B & otherwise \end{cases} \tag{8}$$

を用いると Definition 3.1を満足しない。そこで満足するように表3(b) のような含意を考える。

(a)	C	O	I	U
C	U	U	U	U
O	C	U	I	U
I	C	O	U	U
U	C	O	I	U

(b)	C	O	I	U
C	I	I	I	I
O	I	I	I	I
I	C	O	I	I
U	C	C	I	I

表 3: (a)J.Lukasiewicz の含意 (b) ＱＩ論理の含意

ここで別の面から含意を考えてみる。
含意は次の２点を満たすように定義すべきだと考えられる。

- A が真なら $A \to B$ を評価した結果は B になる。
- $A \to A = I$ である。

ところが、第１の条件を満たすためには (7) 式を満足出来ないのである。ここで提案した含意も第一の条件を満たしていない。
ＱＩ論理の推論法を定義するためにはこの点を解決しなければならないが、これについては今後の課題である。

4 ファジィへの拡張

ここでは便宜上、QI と同型である B^2 の元をで QI の元を表す。
ＱＩ論理をファジィ化するために、構造がＱＩ論理と似ているファジィ論理の一種であるファジィ・インターバル論理（ＦＩ論理）[1] を参考にする。
ＦＩ論理は通常の論理と同様に「真」を最大元に「偽」を最小元に持つ論理であり、それを非ファジィ化した構造は否定演算を除いて QI と同じである。それはちょうど図１を時計回りに９０度回転させたものに相当する。またその否定演算は QI の ¬ と同じものである。
さらにＦＩ論理は「曖昧さ」の半順序関係により定義されるもう一つの束構造をもっている。この発想はＱＩ論理の発想とほぼ同じものである。
そこで、それを参考にファジィに拡張したＱＩ論理（ＦＱＩ論理）を定義する。
閉区間 $I = [0, 1]$ とすると、ＦＱＩ論理代数は、$FQI = \langle I \times I, \cap, \cup, - \rangle$ と表せる。

Definition 4.1 FQI の元は $[a_F, a_T] \in I \times I$ のように表し、そのハッセ図を図 *2*のように定義する。

a_F は偽の曖昧さの度合で a_T は真の曖昧さの度合を表す。注意すべき点は、普通は曖昧であればあるほど度合が小さくなるがＦＱＩ論理においては逆に曖昧であればあるほど度合が大きくなる。
これは、ＱＩ論理の半順序関係が曖昧であるほど上に来るようにして定義したためである。

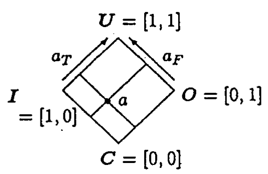

図 2: ＦＱＩ論理のハッセ図

例えば $[0.5, 0.3]$ は図中の a に相当する。
ＦＱＩ論理の演算∩, ∪はＦＩ論理の曖昧さの交わり、結び、さらにＱＩ論理の定義をもとに次のように定義する。

Definition 4.2 ＦＱＩ論理における $\cap, \cup, -$ は
$\forall [a_F, a_T], [b_F, b_T] \in QI$ において
$[a_F, a_T] \cap [b_F, b_T] = [\min(a_F, b_F), \min(a_T, b_T)]$
$[a_F, a_T] \cup [b_F, b_T] = [\max(a_F, b_F), \max(a_T, b_T)]$
$-[a_F, a_T] = [1 - a_F, 1 - a_T]$

ＱＩ論理と同様に、さらに ¬ を加えたものを $FQI^{\neg}$ とする。¬ はＦＩ論理における否定と同じもので

$$\neg [a_F, a_T] = [a_T, a_F] \tag{9}$$

とする。
FQI 並びに $FQI^{\neg}$ の代数的構造については今後の課題である。

5 最後に

本稿では、まず、情報の量に着目したＱＩ論理代数について定義し、その代数的構造についていくつかの定理を紹介した。さらに、その応用としてＱＩ論理による推論法について考察した。含意の定義の問題は今後の研究で解決したい。
ファジィへの拡張についてはその概要についてのみを示した。その代数的な構造については今後の課題である。
更に今後の課題として、ＱＩ論理で述語が扱えるＱＩ述語論理を定義し、prolog のような論理型言語への応用について研究していきたい。

参考文献

[1] 向殿政男・菊池浩明 ファジィ・インターバル論理の提案, 日本ファジィ学会誌,Vol.2,No.2

[2] J.C.Muzio and T.C.Wesselkamper Multiple-Valued Switching Theory,Bristol:Adam Hilger Ltd,1986

[3] 長尾真・淵一博 論理と意味, 岩波講座 情報科学 - 7