3R−6

Dempster-Shafer理論に基く知識と信念の論理

村井哲也　　宮腰政明　　新保　勝
(札幌医大衛生短大部)　　(北大工学部)

1．まえがき

本稿の目的はDempster-Shafer理論[6](以下，D-S理論)に様相論理構造が内在することを示すことにある．まず，D-S理論における識別の枠を可能世界の集合とみなし，各文を真とする世界の集合のbelief関数(またはplausibility関数)の値が1のとき，その文を確信する(または単に信じる)と定義することで，信念様相論理のモデルを構成し，その性質を論じる．次にそのモデルに対して，ミニマル・モデル[2]に関する結果を援用して，健全かつ完全な体系を示す．最後に，論理的全知の問題と測度の性質の関係に触れる．

2．D-S理論に基く知識と信念の論理

2.1.D-Sモデル

【定義1】様相論理の有限D-Sモデルとは

$$\langle W, \{bpa_\alpha\}_{\alpha\in W}, v\rangle$$

である．ここで，$W(\neq\phi)$は可能世界の有限集合，vは原子文に対する付値である．また，bpa_αはWを識別の枠とみなした基本確率割当であり，各世界$\alpha(\in W)$での信念判断の規準を与える：

$$bpa_\alpha : \mathfrak{P}(W)\rightarrow[0,1]$$
$$bpa_\alpha(\phi)=0$$
$$\Sigma_{X\subseteq W}bpa_\alpha(X)=1.$$ ▮

Chellas[2]に従い，次の記号を使用する：

$\models^{\mathcal{M}}_{\alpha}p \Leftrightarrow$ 文pはモデル$\mathcal{M}$の世界αで真である

$\models^{\mathcal{M}}p \Leftrightarrow$ 文pは$\mathcal{M}$のすべてのαで，$\models^{\mathcal{M}}_{\alpha}p$

$\models_{C}p \Leftrightarrow$ 文pはCのすべての$\mathcal{M}$に対し，$\models^{\mathcal{M}}p$

ここで，Cはモデルのクラスである．原子文pに対し，

$\models^{\mathcal{M}}_{\alpha}p \Leftrightarrow v(p,\alpha)=1$

である．付値vは命題論理の複合文に対し，通常通り拡張される．様相演算子を含む文については次節で述べる．文pの命題とはpを真とする世界の集合であり，大文字Pで表わす：

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \mid \models^{\mathcal{M}}_{\alpha}p\}.$$

bpa_αが導くbelief関数，plausibility関数をそれぞれ，Bel_α, Pl_αと書く：

$$Bel_\alpha(X) \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_{Y\subseteq X}bpa_\alpha(Y)$$
$$Pl_\alpha(X) \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_{X\cap Y\neq\phi}bpa_\alpha(Y).$$

二つの関数は互いに双対な関係にある：

$$Bel_\alpha(X)+Pl_\alpha(X^c)=1 \qquad (\forall X\subseteq W).$$

2.2.様相演算子

Bel_α, Pl_αは各文(の命題)に対する確実性ともっともらしさを表現する．本稿ではそれぞれ,[5]で議論された強弱二種の信念(確信と単なる信念)に対応するという解釈の下で演算子を定義する．

【定義2】

(1) $\models^{\mathcal{M}}_{\alpha}\mathbf{C}p$(pを確信する) $\Leftrightarrow Bel_\alpha(P)=1$

(2) $\models^{\mathcal{M}}_{\alpha}\mathbf{B}p$(pを信じる) $\Leftrightarrow Pl_\alpha(P)=1$.

論理様相の可能性に相当する演算子は次の性質を持つ．

【補題3】

(1) $\models^{\mathcal{M}}_{\alpha}\neg\mathbf{C}\neg p \Leftrightarrow Pl_\alpha(P)>0$

(2) $\models^{\mathcal{M}}_{\alpha}\neg\mathbf{B}\neg p \Leftrightarrow Bel_\alpha(P)>0$.

演算子**C**,**B**間に次の相互作用[1]が成り立つ．

【補題4】

(1) $\models^{\mathcal{M}}\mathbf{C}p\rightarrow\mathbf{B}p$

(2) $\models^{\mathcal{M}}\mathbf{C}p\rightarrow\neg\mathbf{B}\neg p$

(3) $\models^{\mathcal{M}}\mathbf{B}p\rightarrow\neg\mathbf{C}\neg p$.

以下では，有限D-Sモデルから演算子を**C**のみに限定して得られるモデル$\langle W,\{Bel_\alpha\}_{\alpha\in W},v\rangle$を有限Belモデル，演算子**B**に限定したモデル$\langle W,\{Pl_\alpha\}_{\alpha\in W},v\rangle$を有限Plモデルと呼ぶ．また，$C_{Bel}, C_{Pl}$をそれぞれ，すべての有限Bel，有限Plモデルからなるクラスとする．

【注】認識論(cf.[5])では伝統的に知識を真なる正当化された信念として定義する．D-Sモデルでは，確信演算子を正当化された信念と見なせば知識演算子を

$\models^{\mathcal{M}}_{\alpha}\mathbf{K}p$(pを知る) $\Leftrightarrow \models^{\mathcal{M}}_{\alpha}\mathbf{C}p\wedge p$

で定義でき，体系KTに対応する．▮

3．Bel,Plモデルの性質

まず，任意の有限Belモデルの性質を述べる．

【補題5】

(1) $\models^{\mathcal{M}}p \Rightarrow \models^{\mathcal{M}}\mathbf{C}p$　(RN)

(2) $\models^{\mathcal{M}}\mathbf{C}(p\rightarrow q)\rightarrow(\mathbf{C}p\rightarrow\mathbf{C}q)$　(K)

(3) $\models^{\mathcal{M}}\mathbf{C}p\rightarrow\neg\mathbf{C}\neg p$　(D).

次に，任意の有限Plモデルは次の性質を有する．

【補題6】

(1) $\models^{\mathcal{M}}p\leftrightarrow q \Rightarrow \models^{\mathcal{M}}\mathbf{B}p\leftrightarrow\mathbf{B}q$　(RE)

(2) $\models^{\mathcal{M}}\mathbf{B}(p\wedge q)\rightarrow\mathbf{B}p\wedge\mathbf{B}q$　(M)

(3) $\models^{\mathcal{M}}\mathbf{B}\top$　(N)

(4) $\models^{\mathcal{M}}\neg\mathbf{B}\neg\top$　(P).

ただし，⊤は恒真命題を表わす．

認識論理[4,5]で，それぞれ正および負の内省公理として知られる公理4および5は反復様相を含む．そのような公理は，各世界に設定された測度間の性質に関係し，測度単独の性質からは導かれない．従って，有限Bel,Plモデルでは反復様相を含む公理は一般には成り立たず，その妥当性の条件は複雑である．ただし，各世界に同一の測度が設定されている場合は単純である．

【補題7】有限D-Sモデルにおいて

$\forall\alpha,\beta\in W,\quad bpa_\alpha=bpa_\beta$

であるならば

(1) $\models^{\mathcal{M}}\mathbf{C}p\rightarrow\mathbf{C}\mathbf{C}p$　(4)

(2) $\models^{\mathcal{M}}\neg\mathbf{C}p\rightarrow\mathbf{C}\neg\mathbf{C}p$　(5)

(3) $\models^{\mathcal{M}}\mathbf{B}p\rightarrow\mathbf{B}\mathbf{B}p$　(4)

(4) $\models^{\mathcal{M}}\neg\mathbf{B}p\rightarrow\mathbf{B}\neg\mathbf{B}p$　(5).

4．健全性と完全性

4.1.健全性

推論規則RN,公理K,Dで特徴付けられる体系はKDであるから，補題5より次の定理を得る．

【定理8】体系KDはC_{Bel}に対し健全である．

推論規則RE,公理M,N,Pを有する体系は$EMNP$であり，補題6より次の定理を得る．

【定理9】体系$EMNP$はC_{Pl}に対し健全である．

4.2.完全性

本節では体系KD,$EMNP$のそれぞれ有限Bel，Pl

Epistemic Logic Based on the Dempster-Shafer Theory

Tetsuya MURAI[1), Masaaki MIYAKOSHI[2), and Masaru SHIMBO[2)

1)School of Allied Health Professions, Sapporo Medical College, 2)Hokkaido University

モデルのクラスに対する完全性をミニマル・モデルに対する完全性[2]に帰着して証明する．

4.2.1.ミニマル・モデル

様相論理のミニマル(近傍，Scott-Montague)モデル[2]について略述する．ミニマル・モデル$\mathcal{M}$とは$\langle W, N, v\rangle$のことである．ただし,$W(\neq \phi)$は可能世界の集合,vは原子文に対する付値，NはWを定義域とする関数であり，$N(\alpha)\subseteq \wp(W)$である．以下,$N(\alpha)$を$N_\alpha$と書く．ミニマル・モデルでは$N$が必然性を規定する：

$$\models^{\mathcal{M}}_{\alpha} \Box p \Leftrightarrow P \in N_\alpha$$

従って,$W \notin N_\alpha$のとき,恒真命題さえ必然でない．

ミニマル・モデルはNに付す条件により,様々な様相論理体系に対応する．特に,各$\alpha \in W$に対し,二条件

(m) $X \subseteq Y,\ X \in N_\alpha \Rightarrow Y \in N_\alpha$

(a) $X \in N_\alpha \Leftrightarrow \cap N_\alpha \subseteq X$

を満たすとき，到達可能関係Rを

$$\alpha R \beta \Leftrightarrow \beta \in \cap N_\alpha$$

により定義でき,同値なクリプキ・モデルを構成できる．その意味でミニマル・モデルはクリプキ・モデルを包含する．尚，$\cap N_\alpha = \cap\{X \mid X \in N_\alpha\}$である．

4.2.2.体系KDのC_{Bel}に対する完全性

KDは条件(m),(a)に加え

(d) $X \in N_\alpha \Rightarrow X^c \notin N_\alpha$

を満たすミニマル・モデルのクラスに対して,健全かつ完全である[2]．更に，filtrationの方法[2]によって(m),(a),(d)を満たす有限ミニマル・モデルのクラスC_{KD}に対して健全かつ完全である：

$$\vdash_{KD} p \Leftrightarrow \models_{C_{KD}} p$$

ここで，一般に論理体系Σに対し，$\vdash_\Sigma p$はpがΣの定理であることを表わす．従って，KDのC_{Bel}に対する完全性

$$\models_{C_{Bel}} p \Rightarrow \vdash_{KD} p$$

を示すためには

$$\models_{C_{Bel}} p \Rightarrow \models_{C_{KD}} p$$

が云えればよい．これは，次の補題から明らかである．

【補題10】任意の$\mathcal{M}=\langle W, N, v\rangle \in C_{KD}$に対し

$$X \in N_\alpha \Leftrightarrow Bel_\alpha(X)=1$$

となる有限Belモデル$\langle W, \{Bel_\alpha\}_{\alpha\in W}, v\rangle$が存在する．

［証明］条件(a)から$\cap N_\alpha \in N_\alpha$．一方,(m),(a)より$W \in N_\alpha$だから,(d)より$\phi \notin N_\alpha$．従って，$\cap N_\alpha \neq \phi$．そこで，基本確率割当を

$$bpa_\alpha(X) = \begin{cases} 1 & X=\cap N_\alpha \text{のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で定義すると，対応するbelief関数Bel_αが題意を満たすのは明らかである．▮

【定理11】KDはC_{Bel}に対して，完全である．

4.2.3.体系$EMNP$のC_{Pl}に対する完全性

体系$EMNP$は前述の条件(m)に加え

(n) $W \in N_\alpha$

(p) $\phi \notin N_\alpha$

を満たすミニマル・モデルのクラスに対し健全かつ完全である[2]．先と同様にfiltrationの方法[2]により，$EMNP$は(m),(n),(p)を満たす有限ミニマル・モデルのクラスC_{EMNP}に対し健全かつ完全である．従って，$EMNP$の有限PlモデルのクラスC_{Pl}に対する完全性を示すためには次の補題を証明すればよい．

【補題12】任意の$\mathcal{M}=\langle W, N, v\rangle \in C_{EMNP}$に対し

$$X \in N_\alpha \Leftrightarrow Pl_\alpha(X)=1$$

となる有限Plモデル$\langle W, \{Pl_\alpha\}_{\alpha\in W}, v\rangle$が存在する．

［証明］$U_\alpha=\{X \mid X^c \notin N_\alpha\}$とおく．(p)より$W^c=\phi \notin N_\alpha$だから,$W \in U_\alpha$．(n)より$\phi^c=W \in U_\alpha$ゆえ,$\phi \notin U_\alpha$.また,$X \in U_\alpha$かつ$X \subseteq Y$ならば$X^c \notin N_\alpha$かつ$Y^c \subseteq X^c$だから,(m)より$Y^c \notin N_\alpha$.すなわち,$Y \in U_\alpha$.従って,$U_\alpha$は有限であるから包含関係に関する極小元$V_1,\cdots,V_k(k \geqq 1)$が存在し,各$V_i \neq \phi$である.そこで,

$$bpa_\alpha(X) = \begin{cases} 1/k & X=V_i(i=1,\cdots,k)\text{のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

により基本確率割当を定義するとき,対応するplausibility関数Pl_αが題意を満たすことを示す．まず，$Pl_\alpha(X)<1$となる$X \in N_\alpha$が存在するならば，U_αのある極小元V_iに対し,$X \cap V_i=\phi$．すなわち,$X \subseteq V_i^c$．従って(m)より,$V_i^c \in N_\alpha$となる．一方，V_iはU_αの元だから，$V_i^c \notin N_\alpha$であり矛盾である.故に,$Pl_\alpha(X)=1$．逆に，任意の$X \notin N_\alpha$に対し,$X^c \in U_\alpha$．従って，ある極小元V_iが存在して$V_i \subseteq X^c$,すなわち,$X \cap V_i=\phi$．ゆえに，$Pl_\alpha(X)<1$である．▮

【定理13】$EMNP$はC_{Pl}に対して，完全である．

D-Sモデルでは,一つの基本確率割当が生成する二つの測度それぞれから異なる体系に対応する様相演算子を定義できるので，Catach[1]の用語に従えば，同質的(homogeneous)ではなく，相互作用(interaction)のある二重様相体系のモデルになる．

5．論理的全知の問題

Hintikka[4]の認識論理は知識からの帰結をすべて知る理想的知覚者のそれであり(論理的全知)，より人間らしい知識のモデルが探究されている．Fagin and Halpern[3]は論理的全知の問題として,次の四点を挙げる：

(ア) 含意の下での閉包性(K)

(イ) 妥当な含意の下での閉包性(RM)

(ウ) 妥当な文に対する知識・信念(RN)

(エ) 同時に充足不能な文を信じないこと(D)

本稿で定義した確信演算子**C**はこれらすべてを満たし,内省公理を除く通常の(論理的全知の問題を生じる)信念論理の性質を有するので，合理的信念を表現すると考えられる．一方,信念演算子**B**は(ア),(エ)を満たさず,論理的全知の問題に対する部分的解決になる．一般に,mをW上の測度とするとき，(イ),(ウ)はそれぞれ

単調性： $X \subseteq Y \Rightarrow m(X) \leqq m(Y)$

正規性： $m(W)=1$

に対応し，これらの性質を持たない測度が問題の解決に有効であると考えられる．

6．あとがき

本稿は,D-S理論にはbelief関数に対応してKDの演算子，plausibility関数に対応して$EMNP$の演算子を有する，同質的でなく相互作用のある二重様相論理体系が内在することを示した.D-S理論における証拠の結合による信念更新の方法は本稿で提示したモデルを通して，信念集合の非単調性に深く関係すると考えられ,詳細は別稿にて報告する予定である．尚,本研究の一部は平成三年度文部省科学研究費（重点領域研究(1) 03251101）の援助を受けて行なったものである．

文　献

[1] L.Catach, Normal Multimodal Logics. Proceedings of AAAI88, 1988, 491-495.

[2] B.F.Chellas, Modal Logic: An Introduction. Cambridge University Press, 1980.

[3] R.Fagin and J.Y.Halpern, Belief, Awareness, and Limited Reasoning. Artificial Intelligence, 34(1988), 39-76.

[4] J.Hintikka, Knowledge and Belief. Cornell University Press, 1962.

[5] W.Lenzen, Recent Work in Epistemic Logic. Acta Philosophica Fennica, 30(1978), 1-219.

[6] G.Shafer, A Mathematical Theory of Evidence. Princeton University Press, 1976.