6Ｆ－２

制約充足問題の計算複雑さについて（１）

西原 清一　　李 江洪
筑波大学 電子･情報工学系

1．はじめに

‘制約充足問題’は，‘整合ラベリング問題’ともいい，人工知能の各分野，とくに組合せ問題において注目されつつある[6,15]．前者はＣＳＰ（Constraint Satisfaction Problem)と略称する． 後者はＣＬＰ（Consistent Labeling Problem）と略称する．一般に，問題対象がなんであれ，それがいくつかの構成要素から成っていて，しかも，対象全体の性質が，構成要素間において成り立つ局所的条件，すなわち‘制約（拘束とも，constraint）’の集合によって定義できるような場合に適用することができる．例えば，連立方程式も，ＣＳＰと見なすことができるが，このとき各等式に現われる変数は局所的制約を受けているといえる．このように，ＣＳＰとして表現したり，ＣＳＰと見なしたりすることのできる問題は非常に多く見られる．

ＣＳＰにおける制約は，知識と考えることができ，問題対象を過不足なく記述できることが要請される．任意のＣＳＰは等価なPrologプログラムに機械的に変換することができる[15]が，ＣＳＰの方がPrologや関数型言語よりさらに非手続き的性質が明瞭になっている．この点において，ＣＳＰが，将来，プログラミングやプランニングの問題に有力なパラダイムを提供する可能性があるものと期待される[16]．そのためには，ＣＳＰに関して，

(1) 制約の表現のための記述言語の開発，
(2) ＣＳＰアルゴリズムの開発と効率評価，
(3) ＣＳＰの応用分野の開拓，

の３つが不可避の課題である．最初の課題は，制約論理プログラミング[8,22]の主要なテーマの一つである．ＣＳＰは基本的に，組合せ探索の問題であり，一般に，ＮＰ完全である．したがって，第２の課題については，現実の問題に適用可能なレベルを保ちつつ，より簡単なＣＳＰの部分クラスを見いだしてゆくことが重要である．本稿は，この課題を考察し，計算複雑さに関する新しい結果について報告するものである．

2．ＣＳＰの計算複雑さ

2.1 ＣＳＰの分類

On the Computational Complexity of Constraint Satisfaction Problems: Part 1
Seiichi Nishihara, Jiang-Hong Li
University of Tsukuba

ＣＳＰは４つ組（U，L，T，R）で定義される[6]．U＝{1，...，n}はユニット（変数とも）の集合，Ｌはラベル（値とも）の集合，Ｔはユニット制約関係といい，ユニット組ｔｉ（$\in U^d$）の集合，Ｒはラベル制約関係Ｒｉ（$\subseteq L^d$）の集合である．ただし，Ｒiはｔｉ（$\in T$）に対する局所的合法ラベリングの集合を与える．（ｔｉ，Ｒｉ)は制約条件ペア(constraint pair)といい，局所的制約の一つである．

ＣＳＰは，ｔi(したがってＲi）の次元ｄ＝|ｔｉ|によって，二項制約と一般の多項制約に分類される．多項制約はさらに全ての次元が同じである同次制約[15]とそうでない場合とがある．任意の多項制約は等価な二項制約に変換できる。また，Ｔの要素ごと，またはＲiの要素ごとに重みをつけた‘概充足(概整合）ＣＳＰ’もある[15]．概充足ＣＳＰは最適化問題となり，動的計画法の手法を用いた解法などが提案されている[20]．

2.2 計算複雑さ

ＣＳＰを解くときの設問として，

・全ての解を求める，
・一つの解を求める，
・あるラベル割りつけ（値組み）が解であるかどうかを判定する，

の３種類の問い方があり，計算複雑さは設問の仕方によって異なる．

ＣＳＰアルゴリズムの効率に関する研究は，(1) 各アルゴリズムに先読みやヒューリスティクスによる探索枝の刈り込みなどを導入し，探索空間をなるべく小さく抑える工夫を施すというアプローチ[6,11-12,17-18]，(2)ＣＳＰの構造に制限を加えて得られるより簡単な部分クラスの計算複雑さを解析する，(3) 並列処理の処理効率を評価する[7,14,19]などの方法がある．第２の方法においては，計算複雑さは，ＣＳＰをまず等価な制約グラフ（拘束ネットワークとも）に変換し，その制約グラフの構造を解析して評価するという方法がよく行なわれる[1-5,9-12,13,21]． Shapiro[13]は，制約グラフが木構造のときＯ(n）の計算時間で処理できることを示した． 筆者ら[12,21]は，一般の多項制約を表現できるように拡張した制約グラフ[18]に関してfront指数を導入し，ＣＳＰがfront指数の多項式時間で全解探索できることを示した．また，Freuder[5]は， 制約グラフがｋ-木のとき多項式時間で一つの解

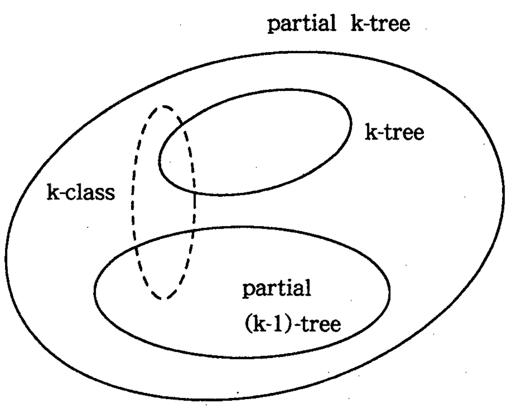
が得られることを示した．これらはいずれも，ＮＰ完全な組合せ探索問題であるＣＳＰを，その等価制約グラフが基本的に木構造になっているような部分クラスに限定したならば，多項式時間で解けるいうことを示したものである．

3．二項制約ＣＳＰの全解探索問題

本研究では，二項制約ＣＳＰの全ての解を求めるという問題について，時間および空間の計算複雑さの上限を考察する．まず，バックトラック無しの**制約木**を生成する手続きを提案し，その計算複雑さがユニット番号に関する或る多項式オーダとなることを明らかにする（定理１）[23]．次に，このオーダが定数ｋ以下になるという制限を導入することにより，ＣＳＰの部分クラスを定義する．このような制限を有するＣＳＰを‘**ｋ-クラス**(k-class)’に属すると呼ぶことにする．

また，ｋ-クラスに属するＣＳＰの制約グラフは，ｋ-木[1,5]または部分ｋ-木であることを示す．厳密な説明は[23]にゆずるが，一般に，組合せ問題の多くがＮＰ完全となる原因は，試行錯誤において組合せ的爆発が起こるためである．したがって，クラスＰに納まるように組合せ問題の部分クラスを定義するには，バックトラックが生じないか，なるべく局所的な見直しだけで済ませられるように，問題を独立した部分問題に分割できるようにしてやるとよい．

ｋ-クラスとｋ-木との関係は，下図のようになっている[23]．



4．おわりに

本稿では，ＣＳＰの意義，および計算複雑さについて考察した．詳細は[23]で述べるが，ｋ-木は単一解を，ｋ-クラスは全ての解を求める場合に，クラスＰを規定するものである．ｋ-クラスとｋ-木の関連については今後さらに検討する必要がある．

[謝辞]　最後に，ICOT KSA-ADS研究会の石塚満主査はじめ委員諸氏の日頃のご厚誼に感謝する．

参　考　文　献

1) Dechter,R. and Pearl,J.: Network-based heuristics for constraint-satisfaction problems, Artif. Intell., 34,1(1988).
2) Dechter,R., Pearl,J., IJCAI '85(1985).
3) Freuder,E.C., J.ACM, 29,1(1982).
4) Freuder,E.C., J.ACM, 32,4(1985).
5) Freuder,E.C.: Complexity of K-tree structured constraint satisfaction problems, AAAI '90(1990), 4-9.
6) Haralick,R.M. and Shapiro,L.G., IEEE Trans. PAMI, 1,2(1979).
7) Kasif, S., Proc. AAAI '86(1986), 349-353.
8) Leler,W.: Constraint Programming Language, Addison-Wesley, Reading, Mass.(1988).
9) Mackworth, A.K. and Freuder,E.C., Artif. Intell., 25,1(1985).
10) Meiri,I., Dechter,R. and Pearl,J., AAAI'90 (1990), 10-16.
11) Nishihara,S. and Ikeda,K., 8th ICPR(1986).
12) Nishihara,S., Shiozawa,T. and Ikeda,K.: Consistent labeling algorithms using the dynamic programming concept, ICS'86(1986).
13) Shapiro,L.G.: Solving consistent labeling problems having the separation property, 7th ICPR(1984), 313-315.
14) 松尾，西原，池田，第２回人工知能学会全国大会(1988).
15) 西原：　整合ラベリング問題と応用，情報処理，31,4(1990).
16) 西原：　ＣＬＰ，ＣＬＰ and ＣＬＰ － 整合ラベリング問題と応用，ＩＣＯＴ KSA-ADS 研究会資料，Sept. 1990.
17) 西原，原，池田，情処論文誌，26,1(1985).
18) 西原，原，池田，信学論（Ｄ），67-D,7(1984).
19) 西原，松尾，人工知能学会誌，6,1(1991).
20) 西原，松尾，池田，人工知能学会誌,3,2(1988).
21) 塩澤，西原，池田：拘束条件の構造を考慮した整合ﾗﾍﾞﾘﾝｸﾞ問題の解法，情処論文誌,27,10(1986).
22) 横井俊夫，相場　亮：　制約ロジック・プログラミング － 知識処理への新しいパラダイム －，情報処理，30,1(1989),29-38.
23) Li,J., Nishihara,S.: 制約充足問題の計算複雑さについて（２），第４２回情処大会 (1991).