

B-スプライン曲線の階層化の一手法

4P-10

橋本 守 篠原克也

日本電気株式会社C&Cシステム研究所

はじめに

B-スプライン曲線のモデリングにおいて、より細かい範囲の形状変更を行うために曲線を細分すると、大きな範囲の形状変更を行おうとするときには、細分する前より多数の制御点を動かすことが必要になる。このとき、細分する前の制御点を用いて大きな範囲の形状制御が行えれば、形状変更が効率的になる。そこで、制御点を階層的に、曲線に影響を与える範囲が最も大きなものから順に小さくなるように構成することを考える。このとき、形状変更による制御点の移動をどのような形で保存するかで、階層化した曲線の形状制御性が左右される。

今回筆者らは、制御点の移動ベクトルを、その長さが上位の制御点の移動に連動する形で保存する階層化手法を開発したので報告する。

B-スプライン曲線の細分と階層

以下では、3次(4階)のB-スプライン曲線を考える。

B-スプライン曲線を、ノット間の2等分の繰り返しで細分する。

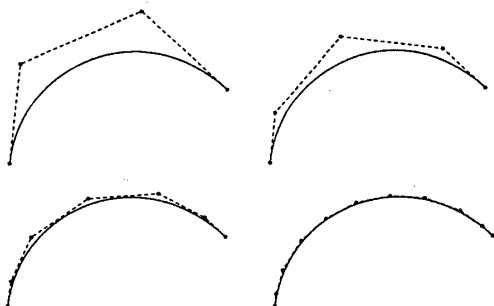


図1 異なる階層の制御点

このとき、ノット間をすべて2等分してできた曲線の制御点を、もとの曲線の制御点よりも一つ階層が下であるとする。このとき、曲線の細分と制御点の階層を対応づける。また、階層の番号付けは、ノットベクトルが $[0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1]$ に対応する制御点を第0階層、ノットベクトルが $[0\ 0\ 0\ 0\ 1/2^n\ 2/2^n\ \dots\ (2^n-1)/2^n\ 1\ 1\ 1\ 1]$ に対応する制御点を第n階層とするものである。図1に、第0階層から第3階層までの制御点を示す。

制御点のオフセット座標系

各階層の制御点は、変形が加えられていない場合は、一つ上位の階層の制御点からオスロアルゴリズム^{[3][4]}^[5]によって計算される。これをデフォルトの位置と呼ぶ。変形が加えられたときには、デフォルトの位置からのずれを記録しなければならない。このずれをオフセットという。曲線全体の形状データは、最も上位の制御点のデータと、各階層の制御点のオフセットデータとして保存される。ある階層の制御点を求めるには、最上位の制御点から出発して、オスロアルゴリズムで次の階層の制御点のデフォルトの位置を求め、それにオフセットを加えることで実際の制御点を計算するということを、当該の階層まで繰り返す。

制御点のオフセットは、上位の制御点に依存する座標系を設定して、その座標系に関する成分にして保存する。このような座標系を、制御点のオフセット座標系と呼ぶ。

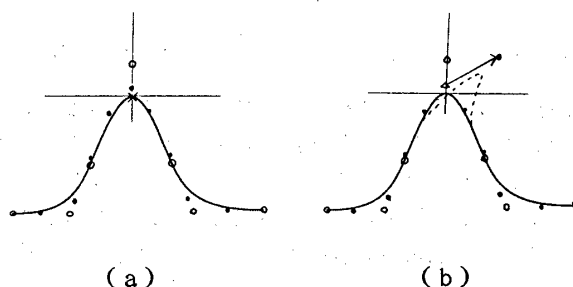


図2 従来手法によるオフセット座標系

従来提案されている階層化手法^{[1][2]}におけるオフセット座標系の設定方法を図2に示す。この手法では、一つ上位の階層の制御点から定まる曲線を基準に座標系を定めるものである。説明のため、上位の階層の制御点でできる曲線を親曲線、当該階層の制御点でできる曲線を子曲線と呼ぶことにする。図2では、親曲線の制御点を白い円で、子曲線の制御点を黒い円で表し、親曲線は実線で、子曲線は点線で書き表す。当該階層の制御点がデフォルトの位置にあるときは、親曲線と子曲線とは一致している。子曲線の制御点に対応するB-スプライン関数の最大値をあたえるパラメータに対応する親曲線上の点をオフセット座標系の原点とする。図2では×印で示

されている。座標軸は、一つを原点における親曲線の接線に、もう一つは法線にとる。この座標系に関して、制御点のデフォルトの位置からのオフセットを成分に分解し、その値を保存する。図2の(a)では、子曲線のある制御点に対して上記のように定められる座標系を、図2の(b)では、その制御点を移動したときの座標系との関係を示している。

提案する手法

今回提案する手法では、曲線を経由せずに、制御点のデフォルトの位置を定める一つ上位の階層の制御点からオフセット座標系を定める。

制御点のデフォルトの位置は、階層を一つ降りる際に行われるノットの細分がすべてのノット間を2等分する規則的なものなので、オスロアルゴリズムから具体的に計算することができる(オスロアルゴリズムの改良版^[5]を用いることもできる)。

簡単のため、両端で多重ノットがないユニフォームB-スプライン曲線を考える。細分前のノットベクトルに対する制御点を{ P_j }、細分後のノットベクトルに対する制御点を{ Q_i }とする。今の場合、 Q_i に対応するノットが、①細分前のノットのうちのどれかと一致するか②全く一致しないかのみによって計算式が決まる。①の場合、 $i=2j$ と書けて $Q_i = \frac{1}{8}P_{j-2} + \frac{3}{4}P_{j-1} + \frac{1}{8}P_j$ となり、

②の場合、 $i=2j+1$ と書けて $Q_i = \frac{1}{2}P_{j-1} + \frac{1}{2}P_j$ となる。

座標系は、原点を制御点のデフォルトの位置とし、各制御点に対して2つの基準点を定め、その基準点を通る直線と、それに垂直な直線を座標軸にとる。制御点が上位の制御点2つに依存している場合(上記②)は、この上位の2つの制御点を基準点とする(図3左)。上位の制御点3つに依存している場合(上記①)には、基準点を制御点の凸結合で作成する。対応する上位の制御点3つから最初の2つの間の直線を3:1に内分する点を一つの基準点に、次の2つの制御点間を1:3に内分する点をもう一つの基準点とする(図3右)。曲線の両端でノットを多重化した場合には、基準点を結ぶ直線が制御点のデフォルトの位置を通り、3つの制御点のうちの両端の2つを結ぶ直線に平行になるように基準点を定める。

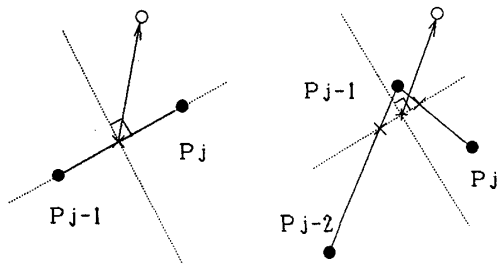


図3 提案手法によるオフセット座標系

さらに、今回提案する手法では、上記の座標系に関してとった制御点のオフセットデータの成分を、基準点間の距離に対する比として保存する。

曲線のモデリング例

図4、図5に提案する手法で作成した曲線の例を示す。図4は、曲線が第0階層から第3階層までの制御点で構成されている様子を示している。図5は、図4の曲線において、第0階層の制御点を移動したときの形状の変化を示している。曲線の印象が比較的良好に保存されることがわかる。

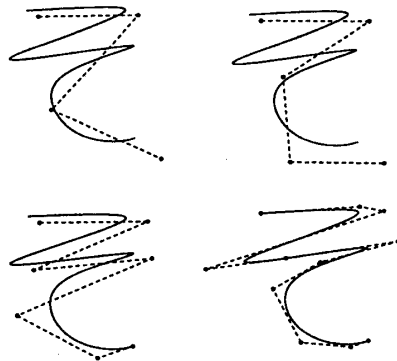


図4 階層化したB-スプライン曲線の例

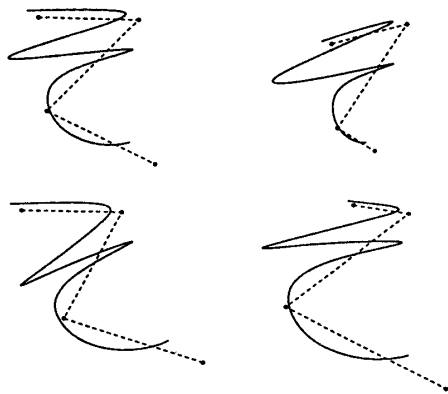


図5 第0階層の制御点の移動による変形の様子

【参考文献】

[1]D.Forsey and R.Bartels, *Hierarchical B-Spline Refinement*, Computer Graphics 22, 4, 205-212 (August 1988)
 [2]J.Foley et al., *Computer Graphics: Principles and Practice (2nd Ed.)*, Addison-Wesley (1990)
 [3]E.Cohen et al., *Discrete B-Splines and Subdivision Techniques in Computer Aided Geometric Design and Computer Graphics*, Computer Graphics and Image Processing 14, 87-111 (1980)
 [4]R.Bartels et al., *An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modeling*, Morgan Kaufmann (1987)
 [5]T.Lyche and K.Morken, *Making the Oslo Algorithm More Efficient*, SIAM J. Numer. Anal. 23, 3, 663-675 (1986)