3E−3

0-1整数計画問題を解く ホップフィールド型ニューラルネットワーク

加藤誠巳　　鵜飼敏之　　青山ゆき
(上智大学理工学部)

1. まえがき

重要な意志決定問題の多くのものは、0-1整数計画問題[1]として定式化できる。今回、ホップフィールド型ニューラルネットワークにより、この0-1整数計画問題の解を求める手法につき検討を行なったのでその結果について御報告する。

2. 0-1整数計画問題

0-1整数計画問題とはいくつかの0または1の値をとる制御変数の値を決定する際、この変数の組み合わせのうち制約条件を満たし、かつ制御変数と出力との関係を与える関数である目的関数を最小にするような解を見つけることである。これを数学的に表現すると、次のようになる。

$$f = \vec{A} \bullet \vec{X} \longrightarrow min$$

$$X_i = 0,1 \qquad i = 1, \cdots, N$$

$$\vec{D}_j \bullet \vec{X} \geq B_j \qquad j = 1, \cdots, M$$

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix} \vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} \vec{D}_j = \begin{bmatrix} D_{j1} \\ D_{j2} \\ \vdots \\ D_{jN} \end{bmatrix}$$

ここで、$\vec{A}$は、目的関数の係数ベクトルであり、$\vec{D}_j$は制約条件式の係数ベクトル、B_jはその限界値である。また、$\bullet$はベクトルの内積を表わす。

3. 0-1整数計画問題のエネルギー関数への写像

ホップフィールド型ニューラルネットワークとは、1985年にHopfield[2]が提唱した最適化問題を解くことの出来る相互に結合されたニューラルネットワークのことである。このネットワークにおいて各ニューロンの特性を表す運動方程式は

$$\frac{dU_i}{dt} = -\frac{U_i}{\tau} - \frac{dE(\vec{V})}{dV_i}$$
$$V_i = g(U_i)$$

ただし U_i：i番目のニューロンの入力値
V_i：i番目のニューロンの出力値
$E(\vec{V})$：エネルギー関数
g：シグモイド関数
τ：時定数パラメータ

と定義される。このとき、ニューロンの出力値$\vec{V}$の関数として定義されるエネルギー$E(\vec{V})$は$\vec{V}$に関して常に減少し、最終的にはEの極小値において平衡状態となる。

A Hopfield Type Neural Network
solving 0-1 Integer Programming
Masami KATO, Toshiyuki UKAI, Yuki AOYAMA
Sophia University

0-1整数計画問題をこのホップフィールド型ニューラルネットで解くため、ここではN個の制御変数をN個のニューロンに対応させた。すなわち、i番目のニューロンの出力値が1となることは変数$X_i = 1$、出力値が0の場合$X_i = 0$を意味する。0-1整数計画問題をエネルギー関数に写像するということは、エネルギーの最小状態が、制約式を満たし、かつ目的関数を最小にするような変数が0または1となる解（以下最適解と呼ぶ。）と対応しているあるエネルギー関数を定義することである。このようなエネルギー関数は次式で表される[3]。

$$E = W_1 \cdot \vec{A} \bullet \vec{X} \quad - W_2 \cdot \sum_j F(\vec{D}_j \bullet \vec{X} - B_j) \\ - W_3 \cdot \sum_i V_i \cdot (V_i - 1)$$

$$F(z) = \begin{cases} 0 & z \geq 0 \\ -k \cdot z^2 & z < 0 \end{cases} \quad \text{k; 正の定数}$$

W_1, W_2, W_3は正の定数

第1項は目的関数を最小にするような実行可能解を志向させるための項であり、第2項は制御変数がすべての制約式を満たしたときにのみ最小値0となる項である。第3項は、変数に必ず0か1の値をとらすための項である。

4. セット・カバリング問題への応用

計算はパソコンを用いてニューラルネットをシミュレートした。乱数を用いて0-1整数計画問題の一種であるSet Covering問題を変数、制約式の数を適当に設定していくつかつくり、陰的列挙法を用いて得られた最適解と比較した。試行した範囲内では（問題として最大のもので、制御変数の数18、制約式の数52）すべて最適解が得られた。図1にパソコンによるシミュレーション画面の例を示す。

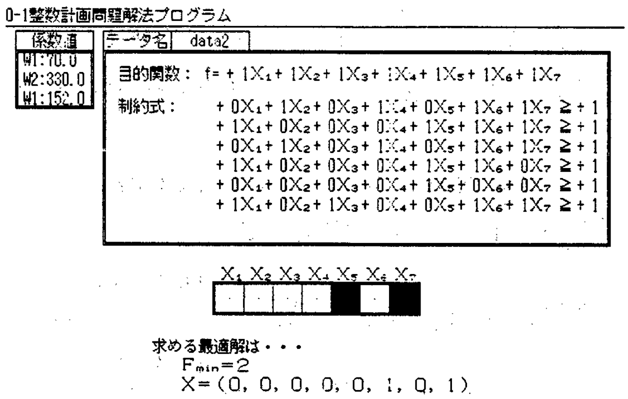

図1　シミュレーションの様子

5. 最短経路探索への応用

最短経路探索も 0-1 整数計画問題として定式化できる。例えば図2のようなネットワークにおいて、それぞれのリンクを1つの制御変数（ニューロン）に対応させ、変数 $X_i = 1$（i番目のニューロンが1となること）はi番目のリンクを通ることを、$X_i = 0$ は通らないことを表すものとする。

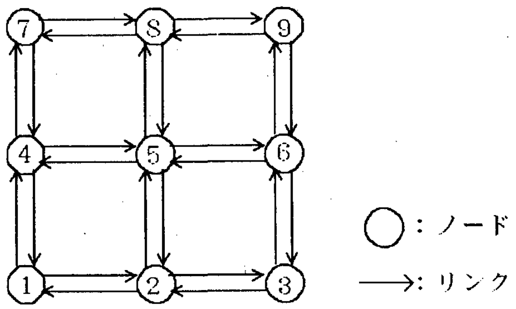

図2　ネットワークの例

リンクiの持つ距離を A_i とすると、目的関数fは、

$$f = \sum_i A_i \cdot X_i$$

となる。

また出発地と到着地が与えられたとき、通るとされたリンクが経路をなすための条件として、出発地から出ていくリンクのうち $X_i = 1$ となるリンクの数は1、入ってくるリンク数は0、到着地から出ていくリンク数は0、入ってくるリンク数は1でなければならず、さらに、出発地と到着地以外のノードは、入ってくるリンク数が0ならば出ていくリンク数も0、もしくは入ってくるリンク数が1ならば出ていくリンク数も1でなければならない。

これを定式化すると、出発地と到着地に関する制約式は、

$$\sum_i X_i \geq 1, \qquad \sum_i X_i \leq 1 \qquad (\text{i; 出発地から出るリンク})$$

（この2式で $\sum_i X_i = 1$ を実現する。）

$$\sum_j X_j \geq 0, \qquad \sum_j X_j \leq 0 \qquad (\text{j; 出発地に入るリンク})$$

$$\sum_k X_k \geq 1, \qquad \sum_k X_k \leq 1 \qquad (\text{k; 到着地に入るリンク})$$

$$\sum_l X_l \geq 0, \qquad \sum_l X_l \leq 0 \qquad (\text{l; 到着地から出るリンク})$$

出発地と到着地以外のノードjに関する制約式は、

$$\sum_i X_i + 10^3 \cdot Y_j \geq 0, \qquad \sum_i X_i - 10^3 \cdot Y_j \leq 0$$

（i; ノードjに入るリンク）

$$\sum_i X_i + 10^3 \cdot (1 - Y_j) \geq 1, \qquad \sum_i X_i - 10^3 \cdot (1 - Y_j) \leq 1$$

（i; ノードjに入るリンク）

（この4式で $\sum_i X_i = 0$ 又は1 を実現する。）

$$\sum_i X_i + 10^3 \cdot Y_j \geq 0, \qquad \sum_i X_i - 10^3 \cdot Y_j \leq 0$$

（i; ノードjから出るリンク）

$$\sum_i X_i + 10^3 \cdot (1 - Y_j) \geq 1, \qquad \sum_i X_i - 10^3 \cdot (1 - Y_j) \leq 1$$

（i; ノードjから出るリンク）

Y_j; ノードjを通過するか否かを決定するために新たに導入された変数

これらの制約式がすべて満たされたとき、得られた変数の組は出発地から到着地までの経路をなす。以上の目的関数と制約式を持つ 0-1 整数計画問題の最適解が最短経路を示すことは明かであろう。

今回上記のアルゴリズムを用いてノード数9、リンク数24と小規模のネットワークに対して最短経路を 0-1 整数計画問題としてホップフィールド型ニューラルネットワークにより求めてみたところ、最適解が得られることを確認した。この場合制御変数の数31個、制約式の数61個であった。

6. むすび

0-1整数計画問題の解法の1つとして、ホップフィールド型ネットワークを用いることはシミュレーションの結果からも有用であることが分かった。今後の課題として、さらに問題の規模が大きくなった場合に計算時間や収束性などの問題が挙げられる。最後に、有益な御討論を戴いた本学マルチメディア・ラボの諸氏に謝意を表する。

参考文献

[1] D.R.Plane and C.McMillan,Jr.（黒田、他訳）："整数計画法入門", p223, 培風館 (昭和 51).

[2] J.J.Hopfield, D.W.Tank: "Neural Computation of Decisions in Optimization Problems", Biol. Cybern., No.52, pp.141-152 (1985).

[3] D.W.Tank, J.J.Hopfield: "Simple Neural Optimization Networks: An A/D Converter, Signal Decision Circuit, and a Linear Programming Circuit", IEEE Trans. on CAS, Vol.CAS-33, No.5, pp.533-541 (1986).