広帯域非ガウス性不規則信号のピーク値分布に関する簡易評価理論

中本昌由[†] 荒木勇一朗[††]
南原英生[††] 雛元孝夫[†††]

本論文では，振幅特性が非ガウス分布で周波数特性が広帯域の不規則信号を考察対象として，ピーク値分布に関する新たな評価理論を提案する．平均レベル以上のピーク値分布については，我々がすでに提案したレベル交差情報に基づくピーク値分布評価法が有効であるが，平均レベル未満の場合については，この手法は必ずしも有効ではない．したがって，その改善策としてよく知られたガウス分布に基づくピーク値分布関数の帯域パラメータに非ガウス性を反映させた手法を提案し，その妥当性・有効性について検討する．さらに，レベル交差情報に基づく手法と新たに提案した手法の長所を組み合わせることにより複合ピーク値分布関数を定義し，すべてのレベルを対象にした実用的なピーク値分布評価法を提案する．この関数は，確率密度関数の正規化条件を満足していることから，ピーク値の各種統計量の推定に対しても有効である．最後に，計算機シミュレーションによって提案手法の有効性を確認する．

Simple Approximation of the Probability Distribution of Peak Values for Broad-band Non-Gaussian Random Signals

Masayoshi Nakamoto,[†] Yuichiro Araki,[††] Hideo Minamihara[††]
and Takao Hinamoto[†††]

In this paper, we propose a new method for approximating the peak values distribution of non-Gaussian type random signals with a wide frequency band. For peak values distributed above the average level, it is effective to use the approximation method based on level-crossings, which we proposed previously. However, in the case of distributions below the average level, this is not necessarily the best approach. Here, we improve on the well-known peak distribution theory, and propose a simple approximation method which applies non-Gaussian type frequency-band-parameter to the function assuming a Gaussian random process. We examine the suitability and effectiveness of the new method, and propose a practical approximation theory for all levels by defining a compound-function, which is a combination of the level-crossings and the new method. This function provides an effecitve estimate of the statistical quantities of peak values that are satisfied with normalized conditions of the probability density function. Finally, the effectiveness of the practical approximation theory is confirmed using digital simulations.

1. まえがき

不規則変動波形のレベル交差やピーク値分布に関する信号処理法は，騒音・振動の統計的評価や海洋波・地震波の分析など，さまざまな工学的分野において研究・応用されている[1)~6)]．よく知られているように，レベル交差は瞬時値と 1 階微分情報から評価可能であるのに対して，ピーク値分布の理論的評価は，瞬時値・1 階微分情報に加えて 2 階微分情報までも必要とするため，一般にその厳密な理論的評価は非常に困難である．文献 6) によると，対象とする不規則変動波形（不規則信号）の振幅特性をガウス分布に限定すれば，任意の周波数特性を有する不規則信号についてピーク値分布の評価が可能であることが示されている．逆に，振幅分布が非ガウスの場合では，狭帯域の周波数特性を仮定する[☆]ことによりピーク値分布評価が可能であることが知られている[1)]．

† 広島大学大学院工学研究科
Graduate School of Engineering, Hiroshima University
†† 岡山理科大学工学部情報工学科
Faculty of Engineering, Okayama University of Science
††† 広島大学工学部第 2 類（電気系）
Faculty of Engineering, Hiroshima University

☆ ここでいう「狭帯域を仮定する」の意味は，通常とは異なったものであり，「信号があるレベルを切る期待回数とそのレベル以上のピーク数が同数である」との近似を用いることである．また，この近似を用いないで（すなわち，狭帯域を仮定しないで）導出した理論を「広帯域を仮定したピーク値分布評価法」と呼ぶ．

ところが，振幅分布の非ガウス性と周波数特性の広帯域性をともに考慮に入れた研究，すなわち振幅分布と周波数帯域の両方に自由度を持たせたピーク値分布評価法はあまり例をみないようである．これは，前述したように，瞬時値・1 階微分・2 階微分に関する 3 次元確率密度関数が非常に複雑な形状を示すためであろう．そのため，ピーク値分布関数を陽表示の形で導出することが困難となり，何らかの近似的手法が必要となる．このような要求に対して，既発表では，広帯域かつ非ガウス性の不規則波形に対する新たなピーク値分布評価法を，2 階微分情報を必要としないレベル交差情報に基づいた形で提案した[9]（レベル交差情報に基づく手法）．これは，文献 1)，6) の手法よりも有効な近似的ピーク値分布評価法であるが，平均レベル以上のみを考察対象としたために，平均レベル未満の有効性については確認されていない．

しかしながら，ピーク値の統計量の理論的推定を必要とするような場合☆では，すべてのレベルにおけるピーク値分布を把握することが必要であるため，レベル交差情報に基づく手法のみでは対応しきれない．ゆえに平均レベル未満のピーク値分布評価をも可能とし，その統計量の推定法についても検討することが実用的な応用範囲の拡大につながると考えられる．本論文では，この点に注目して新たなピーク値分布評価法を提案する．

以下，本論文の構成は，2 章では準備として，任意不規則信号のレベル交差回数評価法について述べる．さらに，狭帯域の周波数特性を仮定したピーク値分布評価法[1]と振幅特性をガウス分布に仮定したピーク値分布評価法[6]を要約する．3 章では，本論文の主題でもある信号の振幅分布が非ガウスで周波数特性が広帯域の不規則信号（広帯域非ガウス性不規則信号）を考察対象とし，ガウス分布を仮定した手法[6]を簡易的に非ガウス形へと拡張したピーク値分布評価法を提案する．さらに，ピーク値の統計量推定も可能な複合ピーク値分布関数を新たに定義する．4 章では，計算機シミュレーションにより，提案手法と従来法[1),6)]の有効性を比較・検討し，次いで複合ピーク値分布関数を用いて各種統計量（平均値・分散）を推定することにより，その有効性を確認する．最後の 5 章はむすびである．なお，本文中における煩雑な数式の証明などは，付録にまとめてある．

☆ たとえば，文献 1)，2) ではピーク値の平均値についての考察を行っており，これが環境騒音における振幅分布の L_{10} に対応するとの経験則について理論的裏づけを与えている．

2. 準　備

本論文で考察対象としている不規則信号は，時間 t に関して定常な変動波形である．また，関数表現の簡略化のため，考察対象の原信号（振幅）の平均値を 0，標準偏差を 1 に規格化して以下の議論を進める．

2.1 不規則信号のレベル交差回数

一般に，任意の不規則信号において単位時間あたりにあるレベル x を正の方向に切る期待回数は，

$$N(x)=\int_0^\infty \dot{x}P(x,\dot{x})d\dot{x} \tag{1}$$

と定義されており，信号の瞬時値とその 1 階微分の結合確率密度関数 $P(x,\dot{x})$ に基づいて理論的に評価可能であることが知られている[8]．文献 1) では，瞬時値とその 1 階微分の結合確率密度関数として統計的 Hermite 展開形分布表現を採用することにより，レベル交差関数（レベル x を正方向へ交差する回数を評価する関数）の一般表現が導出されている．すなわち，角周波数 ω に関するパワースペクトル密度関数 $S_x(\omega)$ の n 次モーメント

$$m_n=\int_0^\infty \omega^n S_x(\omega)d\omega \tag{2}$$

を用いて

$$N(x)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_2}{m_0}}e^{-\frac{1}{2}x^2}F_0(x) \tag{3}$$

と表される☆☆．ただし，

$$\begin{aligned}F_k(x)=&\sum_{m=2}^\infty H_{m-2}(0)\sum_{n=0}^\infty A(n,m)H_{n+k}(x)\\&+\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sum_{n=0}^\infty A(n,1)H_{n+k}(x)\\&+\sum_{n=0}^\infty A(n,0)H_{n+k}(x)\end{aligned} \tag{4}$$

ここで，$A(n,m)$ は展開係数であり，

$$A(n,m)=\left\langle \frac{1}{n!}\frac{1}{m!}H_n(x)H_m\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{2m_2}}\right)\right\rangle \tag{5}$$

と定義されている．また，$H_n(*)$ は Hermite 多項式，$<*>$ は平均操作を表している．このレベル交差関数 $N(x)$ は，信号の振幅分布・周波数特性に関係なく適用可能である．

2.2 狭帯域不規則信号のピーク値分布評価法[1]

対象とする不規則信号の周波数特性が狭帯域特性を

☆☆ 原波形・1 階微分波形の標準偏差を，それぞれ σ_x，$\sigma_{\dot{x}}$ とすると，$m_0=\sigma_x^2/2$，$m_2=\sigma_{\dot{x}}^2/2$ となる．すなわち，m_0 に瞬時値情報，m_2 に 1 階微分情報が反映されている．

示す場合は，「レベル交差回数とそのレベル以上のピーク数はほぼ同数である」との Powell の近似理論が成立するため，レベル交差情報に基づいてピーク値分布を評価することが可能である[7)]（Powell の手法）.

したがって，狭帯域を仮定した場合のピーク値分布は，Powell の手法を適用することにより，レベル交差関数 $N(x)$ を x で微分し，全ピーク数 M で割ることにより得られる．さらに狭帯域を仮定した場合は，全ピーク数は平均レベル交差回数 $N(0)$ から計算されることから，結局，ピーク値分布は

$$\begin{aligned} p_N(x) &= -\frac{1}{M}\frac{dN(x)}{dx} \\ &= -\frac{1}{N(0)}\frac{dN(x)}{dx} \quad (x \geq 0) \end{aligned} \tag{6}$$

と表される．このとき，平均レベル未満（$x < 0$）ではピーク値は存在しないとの仮定も考慮し，式 (3) を式 (6) に代入すると，次式のようにピーク値分布の確率密度関数を得ることができる．

$$p_N(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{2}x^2}F_1(x)}{F_0(0)} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \tag{7}$$

特に，スペシャルケースとして信号の振幅特性が典型的なガウス分布を示す場合は

$$A(n,m) = \begin{cases} 1 & (n = m = 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{8}$$

となり，

$$\begin{cases} F_0(x) = 1 \\ F_1(x) = x \end{cases} \tag{9}$$

を満たすことから，Rayleigh 分布と一致することが分かる．この手法は，周波数特性を狭帯域と仮定する必要があるが，振幅分布に自由度が残されており，任意の分布形状を持つ不規則信号について適用できる．

2.3 ガウス性不規則信号のピーク値分布評価法[6)]

対象とする不規則信号の振幅がガウス分布に従う場合，信号の瞬時値とその 1 階微分および 2 階微分の 3 次元結合振幅確率密度関数が与えられていることから，ピーク値分布の確率密度関数は，その定義に基づいて導出される．すなわち，周波数帯域に関係するパラメータ☆（以後，帯域パラメータと呼ぶ）

$$\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{m_0 m_4 - m_2^2}{m_0 m_4}} \tag{10}$$

を用いて，次式で与えられる．

$$\begin{aligned} p_G(x;\varepsilon_0) = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2/\varepsilon_0^2} + \sqrt{1-\varepsilon_0^2} \\ \cdot x e^{-\frac{1}{2}x^2} \Phi\left(-x\frac{\sqrt{1-\varepsilon_0^2}}{\varepsilon_0}\right) \end{aligned} \tag{11}$$

ただし，

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2}dy \tag{12}$$

また，帯域パラメータ ε_0 は

$$0 < \varepsilon_0 < 1 \tag{13}$$

を満たし，特に信号の周波数特性が狭帯域の場合は

$$\varepsilon_0 \to 0 \tag{14}$$

となることから，式 (11) は，前節のスペシャルケースと同様，Rayleigh 分布と一致する．

3. 広帯域非ガウス性不規則信号のピーク値分布評価法

本章では，考察対象とする不規則信号の周波数特性が広帯域で振幅分布が非ガウスの場合を考える．この場合は信号の瞬時値・1 階微分・2 階微分の 3 次元結合確率密度関数に基づいてピーク値分布を評価することはできない．また，信号のレベル交差回数とピーク数が 1 対 1 に対応しないので，Powell の手法に基づいてレベル交差回数からピーク値分布を評価することも不可能である．

文献 9) では，周波数の広帯域性と振幅の非ガウス性を同時に反映したピーク値分布評価法として，レベル交差回数とピーク数の対応関係を用いた**レベル交差情報に基づく手法**を提案した．その要約について述べる．

3.1 レベル交差情報に基づく手法[9)]

信号があるレベル x を正の方向に切る交差回数とそのレベル以上のピーク数の比率はレベルと帯域パラメータの 2 変数に基づいて理論的に評価することが可能であり，

$$\begin{aligned} R(x;\varepsilon_1) = \\ \frac{e^{\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{1-\varepsilon_1^2}}\Phi\left(\frac{x}{\varepsilon_1}\right) + \Phi\left(-x\frac{\sqrt{1-\varepsilon_1^2}}{\varepsilon_1}\right) \end{aligned} \tag{15}$$

で表される．ここで，ε_1 は ε_0 を非ガウス形に拡張した帯域パラメータであり，式 (3) とすべてのレベルに存在する全ピーク数

$$M = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_4}{m_2}}\left\{\sum_{m=2}^{\infty} H_{m-2}(0)\sum_{n=0}^{\infty} B(n,m)H_n(0)\right.$$

☆ 原波形・1 階微分波形と同様，2 階微分波形の標準偏差を $\sigma_{\ddot{x}}$ とすると，$m_4 = \sigma_{\ddot{x}}^2/2$ となる．すなわち，m_4 には 2 階微分情報が反映されている．

$$+\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}B(n,1)H_n(0)$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}B(n,0)H_n(0)\Big\}, \tag{16}$$
$$B(n,m)=$$
$$\left\langle \frac{1}{n!}\frac{1}{m!}H_n\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{2m_2}}\right)H_m\left(\frac{\ddot{x}}{\sqrt{2m_4}}\right)\right\rangle \tag{17}$$

を用いて，

$$\varepsilon_1=\sqrt{1-\left(\frac{N(0)}{M}\right)^2} \tag{18}$$

と定義されている．従来までの帯域パラメータ ε_0 が周波数情報のみで決定されるのに対し，ε_1 は非ガウス情報をも含んだ帯域パラメータである．

$R(x;\varepsilon_1)$ は，関数自体の形状はガウス形を仮定しているが，帯域パラメータ ε_1 の中に非ガウス性が反映されており，非ガウス分布を持つ不規則信号に対しても有効であることが確認されている．そのため，非ガウス振幅特性と広帯域周波数特性を有する不規則信号についてもレベル交差関数 $N(x)$ に基づいてピーク値分布の評価が可能となり，ピーク値分布関数を

$$p_1(x;\varepsilon_1)\equiv-\frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial x}\{R(x;\varepsilon_1)N(x)\} \tag{19}$$

と定義する．さらに，式 (3)，(15) を式 (19) に代入することにより，

$$p_1(x;\varepsilon_1)=\Bigg\{\big(F_1(x)-xF_0(x)\big)\Phi\left(\frac{x}{\varepsilon_1}\right)$$
$$+\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2/\varepsilon_1^2}F_0(x)$$
$$+\sqrt{1-\varepsilon_1^2}e^{-\frac{1}{2}x^2}F_1(x)$$
$$\cdot\Phi\left(-x\frac{\sqrt{1-\varepsilon_1^2}}{\varepsilon_1}\right)\Bigg\}\Bigg/F_0(0) \tag{20}$$

となる．ただし，$p_1(x;\varepsilon_1)$ は，平均レベル以上（$x\geq 0$）のみを考察対象としたピーク値分布評価法である．次節では，主として平均レベル未満（$x<0$）を考察対象としたピーク値分布評価法を新たに提案する．

3.2　帯域パラメータの拡張に基づく手法

前述したように，文献 9) では，帯域パラメータを $\varepsilon_0\to\varepsilon_1$ に置き換えることにより，振幅分布の非ガウス性がピーク数とレベル交差回数の比率関数 $R(x,\varepsilon_1)$ に反映されることが確認されている．いいかえると，振幅の非ガウス性は，関数自体の形状に影響を与えるだけでなく，式 (18) に表されているように，0 レベル交差回数や全ピーク数を通して帯域パラメータの決定にも大きく関係していると考えることができる．

このことをふまえて，$p_G(x;\varepsilon_0)$ の帯域パラメータ ε_0 を ε_1 に置き換えることにより，非ガウス性を反映したピーク値分布関数を定義することができ，

$$p_2(x;\varepsilon_1)=p_G(x;\varepsilon_1)$$
$$=\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2/\varepsilon_1^2}+\sqrt{1-\varepsilon_1^2}$$
$$\cdot xe^{-\frac{1}{2}x^2}\Phi\left(-x\frac{\sqrt{1-\varepsilon_1^2}}{\varepsilon_1}\right) \tag{21}$$

となる．式 (21) は，関数自体の形状はガウス形を仮定し，帯域パラメータのみに非ガウス性を反映させるという新たな試みである．この手法は，帯域パラメータに非ガウス性を反映させることができるとの過去の研究に基づいてはいるが，その構造や理論的根拠は明確ではない．しかし，従来法を簡易的に踏襲する形で表現することができ，さらに次に示すいくつかの好ましい性質を持っている．

ここでは，平均レベル未満（$x<0$）を考察対象とし，次に示すような 3 つの条件に基づいて，$p_1(x;\varepsilon_1)$ と $p_2(x;\varepsilon_1)$ の妥当性について比較・検討する☆．

まず，不規則変動波形の性質として，次のような現象が考えられる．平均レベル付近を軸にして定常に変動する不規則波形は，極限レベル $x=\pm\infty$ では，存在確率が 0 に漸近することから，当然，ピーク値も存在しなくなる．この現象を表現するためには，ピーク値分布関数は極限値（$x=\pm\infty$）で 0 に収束する必要があることから，これを極限値での条件（**極限値条件**）とする．$p_1(x;\varepsilon_1)$ は，$x=\infty$ ではこの条件を満足しているが，$x=-\infty$ では満足していない．一方，提案手法は $x=-\infty$ において

$$\lim_{x\to-\infty}p_2(x;\varepsilon_1)$$
$$=0+\sqrt{1-\varepsilon_1^2}\left\{\lim_{x\to-\infty}xe^{-\frac{1}{2}x^2}\right\}\Phi(\infty)$$
$$=0 \tag{22}$$

となり，極限値条件を満足している．

また，従来までの研究を理論的に包含するという意味から，対象となる不規則信号が狭帯域特性を示す場合は $p_N(x)$ と一致し，ガウス分布を示す場合は $p_G(x;\varepsilon_0)$ に一致することが望ましい．よって，前者を**帯域条件**，後者を**振幅条件**と呼ぶことにする．

$p_1(x;\varepsilon_1)$ は，$x\geq 0$ では極限値条件，帯域条件，振幅条件のすべてを満足しているものの，$x<0$ において満足しているのは振幅条件のみであり，一般に，極

☆ なお，レベル交差情報に基づく手法の考察は，付録 A.1 にまとめる．

限値条件と帯域条件は満足していない．このことから，$x<0$ を考察対象にした場合には，$p_1(x;\varepsilon_1)$ は必ずしも有効ではないことが推測できる．

一方，$p_2(x;\varepsilon_1)$ は $x<0$ を考察対象とした場合，信号の周波数帯域が狭帯域（$\varepsilon_1 \to 0$）では

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon_1\to 0} p_2(x;\varepsilon_1) &= 0+\sqrt{1-0}\,xe^{-\frac{1}{2}x^2}\Phi(\infty)\\ &= 0\\ &= p_N(x) \quad (x<0) \end{aligned} \tag{23}$$

となって $p_N(x)$ と一致し，帯域条件を満たす．また，振幅がガウス分布に従う場合では，$\varepsilon_1=\varepsilon_0$ が成立するから，振幅条件が満たされるのは明らかである．

すなわち，$p_2(x;\varepsilon_1)$ は，$x<0$ において極限値条件，帯域条件，振幅条件のすべてを満たしており，最も良好なピーク値分布評価が期待できる．また，$p_2(x;\varepsilon_1)$ は，$x\geq 0$ においても帯域パラメータの中に非ガウス情報が含まれていることから，$p_G(x;\varepsilon_0)$ よりは有効な手法であると思われる．

3.3 複合ピーク値分布関数

以上の議論によって，平均レベル以上（$x\geq 0$）では $p_1(x;\varepsilon_1)$ が有効であり，また平均レベル未満（$x<0$）では新たに提案した $p_2(x;\varepsilon_1)$ を用いることが最も妥当であるとの結論を得た．さらに，両手法ともにレベル x が変数であり，帯域パラメータとして ε_1 を持つことから，両者を組み合わせた複合ピーク値分布関数を次のように定義する．すなわち，$x\geq 0$ では $p_1(x;\varepsilon_1)$ を用い，$x<0$ では $p_2(x;\varepsilon_1)$ を用いて，

$$p_C(x;\varepsilon_1) \equiv \begin{cases} p_1(x;\varepsilon_1) & (x\geq 0)\\ p_2(x;\varepsilon_1) & (x<0)\end{cases} \tag{24}$$

と定義する．このとき $x=0$ では，一般に

$$\lim_{x\to -0} p_2(x;\varepsilon_1) \neq p_1(0;\varepsilon_1) \tag{25}$$

となって不連続であり，ピーク値分布の評価関数としては問題点がある．しかしながら，$p_1(x;\varepsilon_1)$ と $p_2(x;\varepsilon_1)$ はそれぞれ $x\geq 0$，$x<0$ においてともに振幅条件，帯域条件を満足することから，振幅分布がガウス形の場合

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +0} p_1(x;\varepsilon_1) &= \lim_{x\to -0} p_2(x;\varepsilon_1)\\ &= p_G(0;\varepsilon_0)\end{aligned} \tag{26}$$

であり，$x=0$ においても連続となって $p_G(x;\varepsilon_0)$ と完全に一致する．また，周波数特性が狭帯域の場合，$p_C(x;\varepsilon_1)$ は

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon_1\to 0} p_C(x;\varepsilon_1) &= \begin{cases} \lim_{\varepsilon_1\to 0} p_1(x;\varepsilon_1) & (x\geq 0)\\ \lim_{\varepsilon_1\to 0} p_2(x;\varepsilon_1) & (x<0)\end{cases}\\ &= p_N(x)\end{aligned} \tag{27}$$

となり，$x\geq 0$，$x<0$ ともに $p_N(x)$ と一致する．

さらに，$p_C(x;\varepsilon_1)$ を各区間で別々に積分を実行すれば

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} p_C(x;\varepsilon_1)dx &= \lim_{\beta\to -0}\int_{-\infty}^{\beta} p_2(x;\varepsilon_1)dx\\ &\quad + \int_{0}^{\infty} p_1(x;\varepsilon_1)dx\\ &= 1\end{aligned} \tag{28}$$

であるから，帯域パラメータ ε_1 に関係なく定数 1 となることが分かる☆．すなわち，$p_C(x;\varepsilon_1)$ は確率密度関数の正規化条件を満足している．これは，統計量を理論的に推定するうえで非常に重要な性質であるとともに，$p_2(x;\varepsilon_1)$ を $x<0$ で用いた妥当性の裏付けにもなっている．また，$p_C(x;\varepsilon_1)$ を積分情報に変換した場合，$x=0$ での不連続性はあまり大きくは影響しないことも考慮すれば，$p_C(x;\varepsilon_1)$ は確率密度関数の 1 次モーメントや 2 次モーメントから算出される平均値・分散などの統計量の推定に対して有効であると考えられる．文献 1)，2) のようにピーク値の平均値情報を必要とする要求もあることから，このような $p_C(x;\varepsilon_1)$ の性質は，本手法の実用的な応用範囲が広がったことを意味している．

4. 計算機シミュレーションによる確認

4.1 シミュレーション信号

本論文で考察対象として用いる不規則信号は，文献 9) で使用した周波数帯域が限定されたシミュレーション信号 A，シミュレーション信号 B と，2 つの周波数帯域を持ち，狭帯域信号に雑音が重畳したシミュレーション信号 C である．いずれも，広帯域の周波数特性と非ガウス振幅分布を有する不規則信号であり，詳細については，文献 9) を参照されたい．それぞれの帯域パラメータの値は，**表 1** に示されているとおりで

表 1 ε_0，ε_1 の値
Table 1 Values of ε_0 and ε_1.

	ε_0	ε_1
Simulation Signal A	0.58	0.46
Simulation Signal B	0.62	0.54
Simulation Signal C	0.70	0.67

☆ 具体的な計算は付録 A.2 に示す．

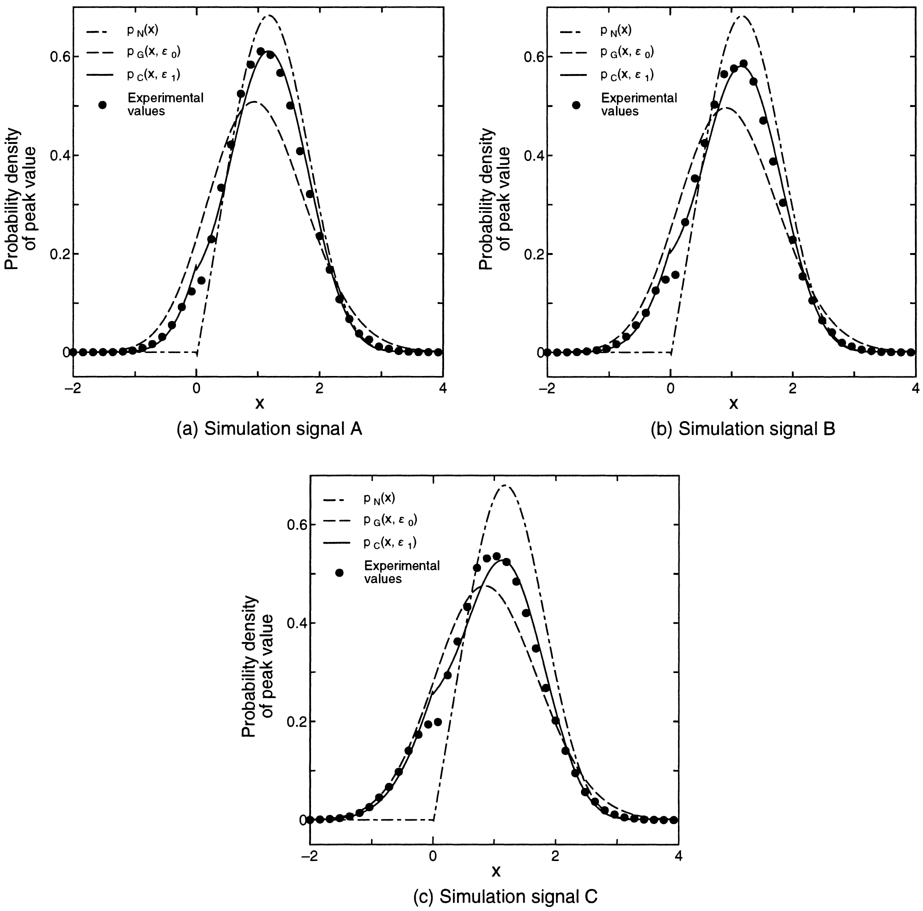

図 1　ピーク値分布評価における理論曲線と実験値の比較
Fig. 1　Comparison between theoretical curves and experimental values in approximation of peak values distribution.

表 2　ピーク値分布評価における MSE（$\times 10^3$）の比較（$x \geq 0$）
Table 2　Comparison between proposed method $p_C(x;\varepsilon_1)$ and previous method of MSE ($\times 10^3$) in approximation of peak values distribution ($x \geq 0$).

	$p_C(x,\varepsilon_1)$	$p_N(x)$	$p_G(x,\varepsilon_0)$
Simulation Signal A	0.39	2.22	4.06
Simulation Signal B	0.44	3.73	3.38
Simulation Signal C	0.57	7.72	2.22

表 3　ピーク値分布評価における MSE（$\times 10^3$）の比較（$x < 0$）
Table 3　Comparison between proposed method $p_C(x,\varepsilon_1)$ and previous method of MSE ($\times 10^3$) in approximation of peak values distribution ($x < 0$).

	$p_C(x,\varepsilon_1)$	$p_N(x)$	$p_G(x,\varepsilon_0)$
Simulation Signal A	0.03	1.12	0.47
Simulation Signal B	0.05	1.94	0.33
Simulation Signal C	0.08	4.16	0.16

ある．

4.2　ピーク値分布評価の比較

ここでは，$p_C(x;\varepsilon_1)$，$p_G(x;\varepsilon_0)$，および $p_N(x)$ について理論曲線と実験値の比較を行った．**図 1** のグラフは，理論曲線と実験値を比較した結果であり，また**表 2**，**表 3** は，それぞれ $x \geq 0$，$x < 0$ における理論曲線と実験値の平均 2 乗誤差（MSE と呼ぶ）を表している．$x \geq 0$ で $p_C(x;\varepsilon_1) = p_1(x;\varepsilon_1)$，$x < 0$ で $p_C(x;\varepsilon_1) = p_2(x;\varepsilon_1)$ となることに注意されたい．

結果より，$p_C(x;\varepsilon_1)$ は $x < 0$ において $p_G(x;\varepsilon_0)$ に比べてピーク値分布評価の精度が改善されていることが分かる．すなわち，非ガウス形の帯域パラメータ

表 4 ピーク値における平均値の推定の比較
Table 4 Comparison between theory and experiment in estimation of the mean of peak values.

	実験値	従来法 1	従来法 2	本手法
Simulation Signal A	1.10	1.02	1.25	1.11
Simulation Signal B	1.05	0.98	1.25	1.06
Simulation Signal C	0.93	0.90	1.25	0.94

表 5 ピーク値における分散の推定の比較
Table 5 Comparison between theory and experiment in estimation of the variance of peak values.

	実験値	従来法 1	従来法 2	本手法
Simulation Signal A	0.44	0.62	0.31	0.44
Simulation Signal B	0.49	0.65	0.31	0.49
Simulation Signal C	0.59	0.71	0.31	0.59

ε_1 をピーク値分布関数にそのまま適用した場合においても，振幅分布の非ガウス性がピーク値分布評価に反映されることが確認できる．この事実は，別の視点からピーク値分布評価を検討するうえでも，非常に重要な性質であるといえる．

4.3 ピーク値の統計量推定

ここでは，複合ピーク値分布関数 $p_C(x;\varepsilon_1)$ を用いてピーク値の統計量（平均値・分散）の推定を行った．まず，シミュレーション信号からピーク値を標本して，実験的に平均値を計算する（これを，実験値と呼ぶ）．次に，ピーク値分布の確率密度関数 $p(x)$ を用いて，ピーク値の平均値

$$\mu_P = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \tag{29}$$

を理論的に推定する．

表 4 は，$p(x) = p_G(x;\varepsilon_0)$ の場合（従来法 1），$p(x) = p_N(x)$ の場合（従来法 2），および本手法である $p(x) = p_C(x;\varepsilon_1)$ の場合について，ピーク値の平均の推定を行い，実験値と比較した結果である．ここで μ_P は，数値積分（シンプソンの公式）を用いることにより計算した．同様に，もう 1 つの例としてピーク値の分散

$$\sigma_P^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_P)^2 p(x)dx \tag{30}$$

を推定した結果と実験値の比較を**表 5** に示す．表 4 と表 5 より，本手法が，従来法 1・従来法 2 に比べてより有効な推定法であることが確認できる．また $p_C(x;\varepsilon_1)$ を用いれば，確率密度関数の積分情報に基づくその他の各種統計量の推定も可能である．

4.4 理論の適用範囲に関する考察

また，理論の適用範囲を調べるため次のような実験を行った．最低周波数を f_L $(= 5.0\,\mathrm{Hz})$ で固定し，その周波数から帯域幅 B の区間 $[f_L, f_L + B]$ に一様な成分を持つ不規則信号を三角級数モデルによって発生させる．さらに，その信号に非線形変換を施すことによって非ガウス性信号を生成し，正規化してシミュレーション実験を行った．また，非ガウス性の指標として，典型的なガウス分布と信号の振幅特性のずれの分散 V を計算し，MSE との関係を調べた．**図 2** (a)〜(f) は帯域幅 B をいろいろ変化させた結果である．

5. む す び

今回の研究では，広帯域非ガウス形不規則信号のピーク値分布評価を目的として，従来法[6)]の帯域パラメータが，レベル交差回数と全ピーク数に基づいて計算されることから，これに複雑な形状を示す非ガウス性を反映させ，新たな評価手法を提案した．さらに，この新しい手法とレベル交差情報に基づく手法[9)]の両者の長所を組み合わせることにより，複合ピーク値分布関数を定義した．この関数は，確率密度関数の正規化条件を満たすことから，ピーク値の統計量の推定に対しても有効である．また，提案手法の有効性を計算機シミュレーションによって確認し，非ガウス性を帯域パラメータに反映させるという新たな試みが実験的にも確認できた．また，提案手法を用いれば，従来法[1),6)]よりもピーク値の各種統計量（ここでは，平均値と分散）を高精度に推定することも可能となった．

今後の課題として残されているのは，

- ε_1 が 1 に近い値となる，より激しい変動波形に適用することを目的とした本理論の改良や新たな手法の開発．
- 文献 2) で考察対象となっているような，振幅の平均値と標準偏差の間に相関を持つ正領域内変動波形への本手法の適用．
- 実分野の各種の不規則現象に適用して，実用的な有効性の確認．

などである．なお，本手法は実験的には良好な結果が得られているものの，スペシャルケースで従来法と一致していること以外，理論的背景に不明な点が多い．これらを解明することも重要であると考えられる．

謝辞 貴重なご意見をいただきました査読者に深く感謝します．

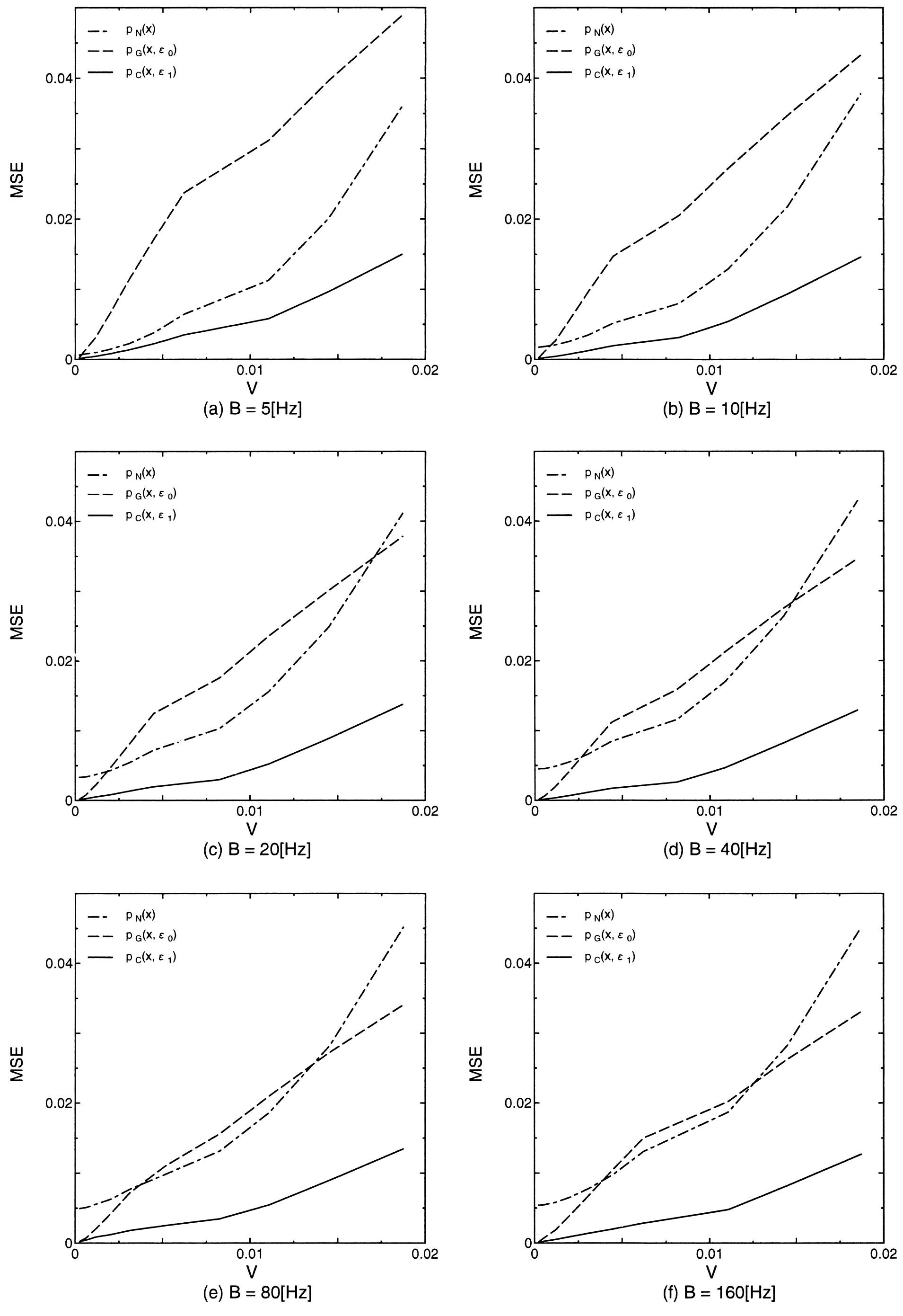

図 2　V と MSE の関係
Fig. 2　Relation between V and MSE.

参 考 文 献

1) 南原英生，西村正文，太田光雄：任意不規則騒音・振動波形のピーク値分布に関する一評価理論と実験，音響学会誌，Vol.37, No.3, pp.116–122 (1981).
2) 南原英生，西村正文，太田光雄：正領域内確率変動波の交差・ピーク値に関する簡易信号処理法と環境騒音・振動への適用，電気学会論文誌，Vol.109-C, No.8, pp.601–606 (1989).
3) Hamilton, J.: Extreme peak value vessel response combinations with wide band spectra, *Appl. Ocean Res.*, Vol.15, No.6, pp.373–380 (1993).
4) Ribeiro, J. and Rousselle, J.: Robust simple scaling analysis of flood peaks series, *Can. J. Civ. Eng.*, Vol.23, No.6, pp.1139–1145 (1996).
5) Gusev, A.A.: Peak factors of Mexican accelerograms: Evidence of a non-Gaussian amplitude distribution, *J. Geophys. Res.*, Vol.101, No.B9, pp.20083–20090 (1996).
6) Cartwright, D.E. and Longuet-Higgins, M.S.: The statistical distribution of the maxima of a random function, *Proc. Soc.*, Vol.A237, No.212, pp.212–232 (1956).
7) Powell, A.: On the fatigue failure of structures due to vibration excited by random pressure field, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol.30, No.12, pp.1130–1135 (1958).
8) Rice, S.O.: Mathematical analysis of random noise, *Bell System Tech. J.*, Vol.23, pp.282–332 (1944).
9) 中本昌由，南原英生，太田光雄：レベル交差情報を用いた広帯域非ガウス形不規則信号のピーク値分布評価法，電子情報通信学会論文誌（A），Vol.J82-A, No.3, pp.471–481 (1999).

付 録

A.1 レベル交差情報に基づく手法の考察

(a) 極限値条件

式 (20) を

$$p_1(x;\varepsilon_1) = -\frac{1}{M}\left\{R(x;\varepsilon_1)\frac{dN(x)}{dx} + \frac{\partial R(x;\varepsilon_1)}{\partial x}N(x)\right\}$$

のように書き換えて，この右辺に着目すると，一般に

$$\begin{cases} \lim_{x\to\pm\infty} N(x) = 0 \\ \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{dN(x)}{dx} = 0 \end{cases} \tag{31}$$

であり，$x=\infty$ の場合

$$\begin{cases} \lim_{x\to\infty} R(x;\varepsilon_1) = 1 \\ \lim_{x\to\infty} \dfrac{\partial R(x;\varepsilon_1)}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{32}$$

となって

$$\lim_{x\to\infty} p_1(x;\varepsilon_1) = 0$$

となることは明らかである．したがって，$x=\infty$ の場合には極限値条件は満たされる．

(b) 帯域条件

信号の周波数特性が狭帯域の場合，$x \geq 0$ では

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon_1\to 0} p_1(x;\varepsilon_1) &= \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}F_1(x)}{F_0(0)} \\ &= p_N(x) \quad (x \geq 0) \end{aligned} \tag{33}$$

となって，帯域条件を満たす[9)]．

(c) 振幅条件

振幅がガウス分布に従う場合，$p_1(x;\varepsilon_1)$ は $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ が成立するから，$x \geq 0$，$x < 0$ ともに振幅条件を満足する．

A.2 $p_C(x;\varepsilon_1)$ の正規化条件について

$p_1(x;\varepsilon_1)$ の $[0,\infty)$ における積分値

$$p^+ = \int_0^\infty p_1(x;\varepsilon_1)dx$$

に式 (19) を代入すれば

$$\begin{aligned} p^+ &= -\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{M}R(x;\varepsilon_1)N(x)\right\} \\ &\quad + \frac{1}{M}R(0;\varepsilon_1)N(0) \\ &= -\frac{1}{M}\left\{\lim_{x\to\infty} R(x;\varepsilon_1)\right\}\left\{\lim_{x\to\infty} N(x)\right\} \\ &\quad + \frac{N(0)}{M}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon_1^2}}\Phi(0) + \Phi(0)\right\} \end{aligned} \tag{34}$$

となる．さらに，式 (31)，(32) と関係式

$$\frac{N(0)}{M} = \sqrt{1-\varepsilon_1^2}$$

に注意して式 (34) を整理すれば

$$p^+ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-\varepsilon_1^2}}{2} \tag{35}$$

のように表される．

同様に，$p_2(x;\varepsilon_1)$ の $(-\infty,0)$ における積分値 p^- は

$$\begin{aligned} p^- &= \lim_{\beta\to -0}\int_{-\infty}^{\beta} p_2(x;\varepsilon_1)dx \\ &= 1 - \lim_{\beta\to -0}\left\{\Phi\left(\frac{\beta}{\varepsilon_1}\right)\right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sqrt{1-\varepsilon_1^2}e^{-\frac{1}{2}\beta^2}\Phi\left(-\beta\frac{\sqrt{1-\varepsilon_1^2}}{\varepsilon_1}\right)\Bigg\} \\
&=1-\left\{\Phi(0)+\sqrt{1-\varepsilon_1^2}\Phi(0)\right\} \\
&=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1-\varepsilon_1^2}}{2} \qquad (36)
\end{aligned}
$$

となる．

したがって，式 (35)，(36) から，

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} p_C(x;\varepsilon_1)dx &= \lim_{\beta\to -0}\int_{-\infty}^{\beta} p_2(x;\varepsilon_1)dx \\
&\quad + \int_0^{\infty} p_1(x;\varepsilon_1)dx \\
&= p^- + p^+ \\
&= 1
\end{aligned}
$$

となることが分かる．

(平成 11 年 5 月 31 日受付)
(平成 13 年 2 月 1 日採録)

中本　昌由（学生会員）

平成 9 年岡山理科大学工学部情報工学科卒業．平成 11 年同大学大学院修士課程修了．現在，広島大学大学院工学研究科博士課程後期在学中，呉高専・非常勤講師．確率過程の解析，ディジタル信号処理，遺伝的アルゴリズムの応用に関する研究に従事．電子情報通信学会，IEEE 各会員．

荒木勇一朗（学生会員）

平成 11 年岡山理科大学工学部情報工学科卒業．同年同大学大学院修士課程入学．確率過程の解析に関する研究に従事．

南原　英生（正会員）

昭和 45 年立命館大学理工学部電気工学科卒業．昭和 47 年同大学大学院修士課程修了．同年，広島電機大学工学部助手，同講師，同助教授，同教授を経て，現在岡山理科大学工学部教授．工学博士．主として，不規則信号解析，環境評価（騒音・振動）の研究に従事．電子情報通信学会，計測自動制御学会，日本音響学会，応用統計学会，電気学会各会員．共著「コンピュータによる数値計算」（朝倉書店）．

雛元　孝夫（正会員）

昭和 44 年岡山大学工学部電気工学科卒業．昭和 46 年神戸大学大学院修士課程修了．同年シャープ入社．昭和 47 年神戸大学工学部助手．昭和 54〜56 年カナダ国クィーンズ大学客員研究員．昭和 59 年 4〜8 月カナダ国クィーンズ大学，トロント大学各客員研究員．神戸大学工学部講師を経て昭和 63 年鳥取大学工学部教授．平成 4 年広島大学工学部第二類（電気系）教授．平成 5〜7 年 IEEE Trans. on Circuits & Systems II の Associate Editor．工学博士．ディジタル信号・画像処理，システム理論の研究に従事．電子情報通信学会，計測自動制御学会，システム制御情報学会，電気学会各会員．IEEE Fellow．編著「2 次元信号と画像処理」（計測自動制御学会，コロナ社）．