

ロジスティック写像を用いた正規乱数発生法

長 瀬 隆 久[†]

確率過程のシミュレーションでは、一様乱数と同様、正規乱数を発生させる機会も多い。本稿では、ロジスティック写像の安定不動点を利用した、一様乱数を正規乱数に変換する手法を提案する。 χ^2 検定などを行った結果、その正規性が確かめられた。

A Normal Random Number Generator Based on Logistic Map

TAKAHISA NAGASE[†]

We often use Normal random number like uniform random one in the simulation of stochastic process. This paper proposes a transformation method from uniform random number to Normal one using the stable fixed point of logistic map. According to the χ^2 test etc., its normality was ensured.

1. はじめに

確率・統計の分野で最もポピュラーな確率分布はやはり正規分布であろう。非常に使用頻度が高く、多くの理論が正規分布を仮定することによって成り立っている。そのような中で一様乱数と同様、正規乱数を発生させる場合も非常に多い。そこで本稿では、ロジスティック写像の不動点を利用した正規乱数発生法を提案する。

2. ロジスティック写像の性質

カオスでよく論じられる非線形写像の1つであるロジスティック写像は、

$$X_{t+1} = \alpha X_t(1 - X_t) = \alpha X_t - \alpha X_t^2 \quad (1)$$

であり、パラメータ α の値によって以下のように分類されることが知られている¹⁾。

- $0 \leq \alpha < 1$ の場合
安定不動点 0 に収束
- $1 \leq \alpha < 3$ の場合
安定不動点 $1 - 1/\alpha$ に収束 ($\alpha = 2$ で振動の有無が変わる)
- $3 \leq \alpha \leq 4$ の場合
周期倍分岐を経てカオスへ (不動点は不安定)

多くの研究では $3 \leq \alpha \leq 4$ の場合、その中でも特にカオスが発生する領域が問題にされるのであるが、本稿では、安定不動点に収束するうち、 $1 \leq \alpha < 3$ の場合を問題にする。

3. 安定不動点を持つ非線形力学系にノイズが混入した場合の確率分布

いま、ロジスティック写像にノイズ (一様乱数) が混入した場合を考える。

$$X_{t+1} = \alpha X_t(1 - X_t) + \beta \varepsilon_t \quad (2)$$

この式で、 $\alpha = 2.5$, $\beta = 0.3$, $X_0 = 0.55$, ε_t を $0 \sim 1$ の一様乱数とした場合と、 $\alpha = 2.5$, $\beta = 0.02$, $X_0 = 0.33$, ε_t を $-0.5 \sim +0.5$ の一様乱数とした場合、各々 10^3 個ずつデータを作成したときのヒストグラムが図 1、図 2 であるが、一様乱数がロジスティック写像の不動点に吸引され、分布が大きく変化することを示している。ただし、図 1 の場合は混入させた乱数が $0 \sim 1$ (0 を中心として左右対称でない) なのでヒストグラムが歪みを持っており、平均が不動点 0.6 よりも右側になっているのが分かる。なお、図 2 は正規分布に近いので、標準化したデータを用いている。

また、ロジスティック写像の最後の項の乗数を増やした以下の式は

$$X_{t+1} = a X_t(1 - X_t^2) \quad (3)$$

3 つの不動点、 0 , $\pm[(a-1)/a]^{1/2}$ を持つことが知られている²⁾。 $a = 3.0$ においては図 3 のようにカオス

[†] 東京理科大学大学院経営学研究所
Graduate School of Management, Science University of Tokyo

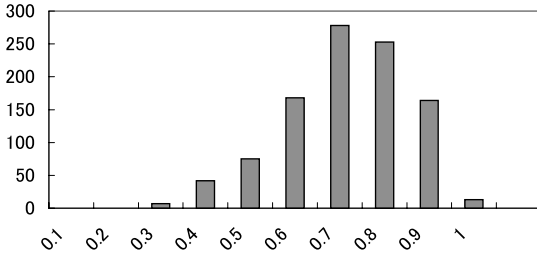


図1 ノイズを加えたロジスティック写像1
Fig. 1 Logistic map 1 adding noise.

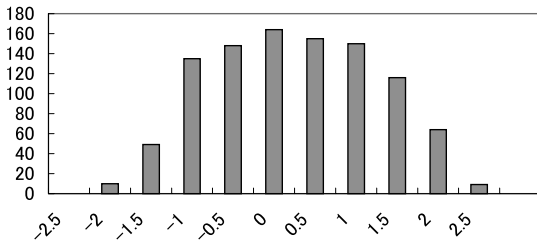


図2 ノイズを加えたロジスティック写像2
Fig. 2 Logistic map 2 adding noise.

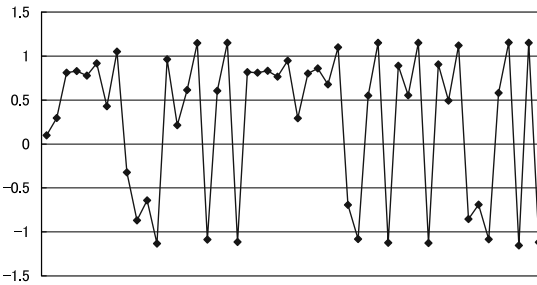


図3 カオス
Fig. 3 Chaos.

となる。 $a = 1.2$ のときは図4のように初期値が正か負により、各々正か負の不動点に収束する。また、ここでも問題とするのはカオスを引き起こすパラメータではなく、安定不動点に収束する方のパラメータである。いま、 $a = 1.2$ においてロジスティック写像の場合と同様にノイズを入れ、

$$X_{t+1} = aX_t(1 - X_t^2) + b\varepsilon_t \quad (4)$$

とすると、図5のような特殊な分布(双峰型)をつくりだすことも可能である。ここで $a = 1.2$, $b = 0.5$ で、 ε_t は $-0.5 \sim +0.5$ の一様乱数である。ただし、この場合はデータ 10^3 個程度だと、はっきりとは2つの山がでてこないことがあるので、 10^4 個のシミュレーションによった。

以上により、非線形力学系が安定不動点を持つ場合において、ノイズを付加すると、それが不動点近傍に

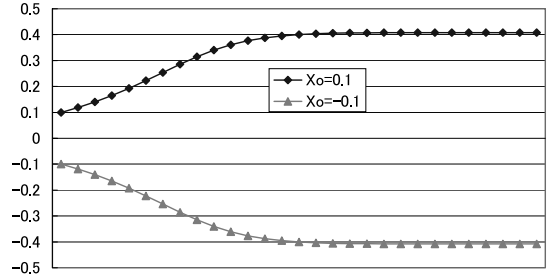


図4 不動点への収束
Fig. 4 Convergence to the fixed point.

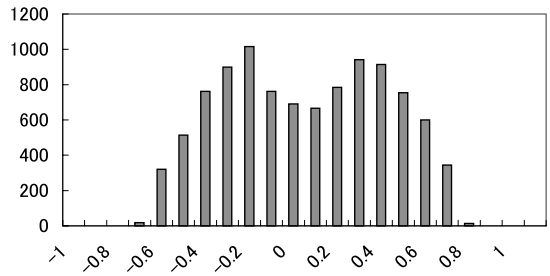


図5 特殊な分布
Fig. 5 Particular distribution.

表1 2つの手法の平均・分散・歪度・尖度
Table 1 Mean, variance, skewness and kurtosis of two methods.

①		②	
平均	0.013333	平均	-0.02803
分散	1.039022	分散	1.00326
歪度	-0.00677	歪度	0.031423
尖度	-0.66973	尖度	-0.71692

引き寄せられる過程を通して、様々な確率分布が作成できることが分かった。

4. 正規乱数の発生とその検証

正規乱数を発生させるには、前述のようにロジスティック写像におけるパラメータを

① $\alpha = 2.5, \beta = 0.02, X_0 = 0.33$

② $\alpha = 1.5, \beta = 0.02, X_0 = 0.33$

の2種類に設定し、そのデータ 10^4 個を標準化変量に変換した。2種類に設定したのは、振動の有無により性質が異なるか否かを確認するためである。

- これらのデータの平均・分散・歪度・尖度を表1に示す。尖度を除けば、これらの分布は近似的に標準正規分布だといえる。
- さらに、 X_1, X_2, \dots, X_n が独立で、各々が $N(0, 1)$ 分布に従うならば、 $\sum X_i^2$ は自由度 n の χ^2 分布をすることが知られている³⁾。一般的に数表は

$n = 100$ までしか参照できないので、 10^4 個のデータを 100 区間 (100 個ずつ) に分割し、有意水準 5% の χ^2 検定 (棄却域は 124.3) を行った。その結果、

- ① 100 区間中棄却されたのは 2 区間 (98% 合格)
 - ② 100 区間中棄却されたのは 6 区間 (94% 合格)
- であったので、これらは近似的に標準正規分布といえる。

- 本手法による正規乱数を時系列と見たときの 1 次の自己相関はほぼ 0 であり、近似的な線形相関すらほとんど見られない。

5. おわりに

本稿では、ロジスティック写像を用いた正規乱数発生法を提案したが、これだけでは検定は十分であるとはいえない。正規乱数発生法はほかに、中心極限定理を用いるもの、ボックス・ミュラー法などがあげられるので、そういった手法と比較検討しながら十分な検討を行う必要がある。また、発生速度に関する比較も行う必要があるだろう。また、不動点に収束する過程を通して、一様乱数が正規乱数に変換される理論的根拠がないことが、この手法の難点であるといえる。なお、本稿で用いた一様乱数は Excel 内の関数を利用し、計算などもすべて Excel で行った。

参考文献

- 1) 山口昌哉：カオス入門，pp.9-13，朝倉書店 (1996)。
- 2) 潮 俊光：カオス制御，p.60，朝倉書店 (1996)。
- 3) ミラー，J.C. (著)，村上正康 (訳)：統計学の基礎，p.209，培風館 (1988)。
- 4) 渡辺裕明，金田康正：ロジスティック写像による擬似乱数発生法，第 53 回情報処理学会全国大会論文集，Vol.1，pp.65-66 (1996)。
- 5) 渡辺裕明，金田康正：テント写像に基づいた擬似乱数生成法，情報処理学会論文誌，Vol.40，No.7，pp.2843-2850 (1999)。
- 6) 香田 徹，柿本厚志：擬似乱数とカオス，情報処理学会論文誌，Vol.27，No.3，pp.289-296 (1986)。
- 7) Phatak, S.C. and Rao, S.S.: Logistic map: A Possible Random-number generator, *Phys. Rev. E*, Vol.51, No.4, pp.3670-3678 (1995)。

(平成 12 年 11 月 29 日受付)

(平成 13 年 4 月 6 日採録)



長瀬 隆久 (学生会員)

1974 年生。1998 年東京理科大学経営学部卒業。2000 年同大学院経営学研究科管理情報科学専攻修士課程入学、現在に至る。時系列解析が研究の中心だが、擬似乱数等にも興味を持つ。

味を持つ。