3-連結グラフの3分割アルゴリズム

4C−1

鈴木均[1]　高橋奈穂美[2]　西関隆夫[1]　宮野浩[3]　上野修一[3]

[1]東北大学　[2](株) 東芝　[3]東京工業大学

1. まえがき

$G=(V,E)$ を点集合 V，辺集合 Eからなる無向単純グラフとする．なお $n=|V|$，$m=|E|$ とし，$V=V(G)$ と書くことがある．また $V'\subset V$によって誘導される G の部分グラフを $G[V']$ と書く．本文ではグラフ G が3-連結であるときに，グラフ3分割問題を $O(n^2)$ 時間で解くアルゴリズムを与える．一般にグラフk分割問題とは以下のような (入力) から，(出力) を求める問題である．

(入力)

$G=(V,E)$　：無向単純グラフ

$a_1,a_2,\ldots,a_k$　：互いに異なる G の k個の点

$n_1,n_2,\ldots,n_k$　：$\sum_{i=1}^{k} n_i = n = |V|$ なる自然数

(出力)

$(V_1,V_2,\ldots,V_k)$：各 $i(1\le i\le k)$ について (1)$a_i\in V_i$, (2)$G[V_i]$ は連結, (3)$|V_i|=n_i$であるような Vの分割

グラフ G が k-連結ならば k分割問題には必ず解が存在することを Györi[2]と Lovász[4]は独立に証明している．特に $k=2$ の場合に対しては Györi の証明から多項式時間アルゴリズムが直ちに得られる．しかし $k\ge 3$ の場合に対してはそれらの証明からは多項式時間アルゴリズムは得られない．本文では，$k=3$ の場合に対し $O(n^2)$ 時間のアルゴリズムを与える．なお，G が k-連結グラフとは限らない場合には，G が二部グラフでかつ $n_i=|V|/k$であると限定してもグラフ k分割問題は NP-困難であることが知られている[1]．なおグラフ分割問題は耐障害ルーチングなどに現れる[3]．

2. 準備

$G=(V,E)$ から $V'(\subset V)$ の全ての点を除去して得られるグラフを $G-V'$と書く．特に V'が1点vからなるとき，$G-v$と書くことがある．G が連結なのに，$G-v$が非連結であるとき，点vは切断点と呼ばれる．点 $v,w\in V$に対し，$G+(v,w)$ は G に辺 (v,w) を付加して得られる単純グラフとする．したがって $(v,w)\in E$のときには $G+(v,w)$ は Gそのものを表す．グラフ G が k点からなる完全グラフ K_kであるか，あるいは $k+1$ 個以上の点を持ちどの $k-1$ 点を取り除いても非連結にならないとき，G はk-連結であるということにする．G の辺 (v,w) の両端点を同一視し，それによって生じた自己ループや多重辺を取り除く操作を辺 (v,w) の縮約という．G の辺 (v,w) を縮約して得られるグラフを $G/(v,w)$ と書く．k-連結グラフ G について，$G/(v,w)$ も k-連結グラフであるとき，辺 (v,w) はk-縮約可能であるという．一方，$G/(v,w)$ が k-連結グラフではないとき，辺 (v,w) はk-縮約不可能 であるという．

2-連結グラフ G が与えられたときに2分割問題を解くアルゴリズムを PART2(G,a_1,a_2,n_1,n_2) と書くことにする．PART2 は $O(mn)$ あるいは $O(m)$ 時間で実行できる[5),7)]．また，2分割問題を少し拡張した以下のような問題を解くアルゴリズムを PART2*(G,a_1,a_2,n_1,n_2,u,w) と書く．PART2*は 2-連結グラフ G，Gの異なる2点a_1,a_2，$n_1+n_2\ge n$ なる自然数n_1,n_2，及びGの異なる2点u,wが与えられたときに，Vの分割(V_1,V_2)で$i=1,2$について，(1)$a_i\in V_i$，(2)$G[V_i]$が連結，$|V_i|=n_i$または$(|V_i|<n_i$かつ$V_i\cap\{u,w\}\neq\phi)$であるものを求める．PART2* も PART2 と同様に $O(mn)$ あるいは $O(m)$ 時間で実行できる[5),7)]．PART2 と PART2*は次の節のグラフの 3-分割を求めるアルゴリズムので用いられる．

An Algorithm for Tripartitioning 3-Connected Graphs

Hitoshi SUZUKI,[1] Naomi TAKAHASHI,[2] Takao NISHIZEKI,[1]
Hiroshi MIYANO,[3] Shuichi UENO[3]

[1]Tohoku University, [2]Toshiba Corp., [3]Tokyo Institute of Technology

3-連結グラフ G が与えられたときに，3-連結性を保ったまま G から何本かの辺を除去して辺数を $O(n)$ 本にする $O(m)$ 時間のアルゴリズムが知られている[6),7)]．3節のアルゴリズムの計算時間は $O(mn)$ であるが，予め辺数を $O(n)$ 本に減らしたグラフに適用することで全体の計算時間を $O(n^2)$ にすることができる．

3. 3-連結グラフの3分割アルゴリズム

本節では 3-連結グラフ G に対し 3-分割問題を解くアルゴリズム PART3 を与える．

function PART3$(G,a_1,a_2,a_3,n_1,n_2,n_3)$;

begin

(0) (a_1,a_2)，(a_2,a_3)，(a_3,a_1) の中で，Eに含まれないものがあれば Eに加える．$G[V_i]$ $(i=1,2,3)$ にこれらの辺が含まれることはないので，こうしても不都合は生じない．

(1) n_1，n_2，n_3のいずれかが1ならば，PART2 を適用する．例えば $n_1=1$ ならば，
　(V_2,V_3) :=PART2$(G-a_1,a_2,a_3,n_2,n_3)$;
　return$(\{a_1\},V_2,V_3)$
を実行し，終了する．$n_2=1$ または $n_3=1$ の場合も同様．

(2) a_1に隣接し a_2や a_3ではない任意の点 v_aを選ぶ．辺 (a_1,v_a) が 3-縮約可能ならば (3) へ，そうでない時は (4) へ行く．

(3) いま (a_1,v_a) は 3-縮約可能である．(a_1,v_a) を縮約して得られたグラフに PART3 を適用する．即ち，
　(V_1,V_2,V_3) :=PART3$(G/(a_1,v_a),a_1,a_2,a_3,n_1-1,n_2,n_3)$;
　return$(V_1\cup\{v_a\},V_2,V_3)$
を実行し，終了する．

(4) いま (a_1,v_a) は 3-縮約不可能である．したがって，$G'=G-\{a_1,v_a,v_b\}$ が非連結になる点 $v_b\in V(G)-\{a_1,v_a\}$ が存在するので，そのような点 v_bを見つける．ただし，もし $G-\{a_1,v_a,a_2\}$ が非連結ならば a_2を v_bとして選び，もし $G-\{a_1,v_a,a_3\}$ が非連結ならば a_3を v_bとして選ぶことにする．G'の連結成分で a_2または a_3を含むものの点集合を Xとし，$X\cup\{a_1,v_a,v_b\}$ から誘導される G の部分グラフを Hとし，$V-X$から誘導される G の部分グラフを Jとする．辺 (a_2,a_3) が存在するので $\{a_1,a_2,a_3\}\subset V(H)$ であることに注意されたい．$v_b=a_2$または a_3ならば (5) へ，そうでなければ (6) へ行く．

(5) 一般性を失うことなく $v_b=a_3$とする．次の3つの場合 (5a)，(5b)，(5c) がある．

(5a) $|V(H)-\{a_1,a_3\}|\le n_2$のとき．この場合には $V(H)-\{a_1,a_3\}$ の全ての点を V_2に含め，Jに辺 (v_a,a_3) を加えた 3-連結グラフ $J+(v_a,a_3)$ に PART3 を適用する．即ち
　(V_1,V_2,V_3) :=PART3$(J+(v_a,a_3),a_1,v_a,a_3,n_1,n_2-|V(H)|+2,n_3)$;
　return$(V_1,V_2\cup(V(H)-\{a_1,a_3\}),V_3)$
を実行して終了する．

(5b) $|V(H)-\{a_1,a_3\}|>n_2$かつ $|V(H-a_3)|\le n_1+n_2$のとき．この場合には $H-a_3$の全ての点を V_1と V_2 に含める．即ち
　(V_1,V_2) :=PART2$(H-a_3,a_1,a_2,|V(H-a_3)|-n_2,n_2)$;
を実行する．もし $v_a\in V_1$になれば
　(V_1',V_3) :=PART2$(J/(a_1,v_a),a_1,a_3,|V(J/(a_1,v_a))|-n_3,n_3)$;
　return$(V_1\cup V_1',V_2,V_3)$
を実行する．もし $v_a\in V_2$ならば
　(V_1',V_3) :=PART2$(J-v_a,a_1,a_3,|V(J-v_a)|-n_3,n_3)$;
　return$(V_1\cup V_1',V_2,V_3)$

を実行する．なお $H+(v_a,a_3)$ および $J+(v_a,a_3)$ が3-連結なので，$H-a_3$，$J/(a_1,v_a)$ および $J-v_a$ は2-連結であることに注意されたい．

(5c) (5a) でも (5b) でもない時．いま $|V(H-a_3)|>n_1+n_2$ である．この場合は J の a_1，v_a 以外の点全てを V_3 に含める．即ち

(V_1,V_2,V_3) :=PART3($H+(v_a,a_3),a_1,a_2,a_3,$
$n_1,n_2,|V(H)|-n_1-n_2$);
return($V_1,V_2,V_3\cup(V(J)-\{a_1,v_a\})$)

を実行する．$H+(v_a,a_3)$ は G から $V(J)-\{a_1,v_a\}$ の全ての点を a_3 に同一視して得られるグラフであり，3-連結であることに注意しよう．

(6) いま $a_2,a_3\neq v_b$ であり，a_2 と a_3 は隣接しているので，ともに H に含まれる．$H'=H+(a_1,v_b)$ が3-連結の時は (7) へ，そうでなければ (8) へ行く．

(7) いま H' は3-連結である．

(7a) $|V(H-a_1)|\geq n_2+n_3$ ならば，

(V_1,V_2,V_3) :=PART3($H',a_1,a_2,a_3,$
$|V(H')|-n_2-n_3,n_2,n_3$);
return($V_1\cup(V(J)-\{v_a,v_b\}),V_2,V_3$)

を実行し終了する．

(7b) $|V(H-a_1)|<n_2+n_3$ ならば

(V_2,V_3) :=PART2*($H-a_1,a_2,a_3,n_2,n_3,v_a,v_b$)

を実行する．次に3-連結グラフ $J'=J+(a_1,v_b)+(v_a,v_b)$ を作る．$v_a\in V_2$，$v_b\in V_3$ あるいは $v_a\in V_3$，$v_b\in V_2$ ならば (7bI) へ，$v_a,v_b\in V_2$ あるいは $v_a,v_b\in V_3$ ならば (7bII) へ行く．

(7bI) 一般性を失うことなく $v_a\in V_2,v_b\in V_3$ とする．

(V_1,V_2',V_3') :=PART3($J',a_1,v_a,v_b,$
$n_1,n_2-|V_2|+1,n_3-|V_3|+1$);
return($V_1,V_2\cup V_2',V_3\cup V_3'$)

を実行し終了する．

(7bII) 一般性を失うことなく $v_a,v_b\in V_2$ とする．この場合は $V_3\cap\{v_a,v_b\}=\phi$ なので，条件 (3)″により $|V_3|=n_3$ のはずである．したがって

J'' := $J'/(v_a,v_b)$;
(V_1',V_2') :=PART2($J'',a_1,v_a,n_1,|V(J'')|-n_1$);
return($V_1\cup V_1',V_2\cup V_2',V_3$)

を実行し終了する．なお J'' は2-連結である．

(8) いま H' は3-連結ではないが，2-連結グラフである．$H''=H'-a_1$ は2-連結成分の"鎖"になっている (証明略)．H'' の2-連結成分のうち a_2，a_3 を含むものを F とする．H'' の切断点と v_a，v_b のうちで F に含まれるものを u，w とする．F の点数を n_F とする．$n_F>n_2+n_3$ ならば (9) へ，$n_F\leq n_2+n_3$ ならば (10) へ行く．

(9) いま $n_F>n_2+n_3$ である．$V_1:=V-V(F)$ とする．$V(F)\cup\{a_1\}$ から誘導される H' の部分グラフに辺 (a_1,u)，(a_1,w) を加えたグラフ M を作り，

(V_1',V_2,V_3) :=PART3($M,a_1,a_2,a_3,$
$n_F-n_2-n_3+1,n_2,n_3$);
return($V_1\cup V_1',V_2,V_3$)

を実行し終了する．なお，明らかに M は3-連結である．

(10) いま $n_F\leq n_2+n_3$ である．また $n_F\geq3$ である．なぜならもし $n_F=2$，即ち F が1本の辺からなるとすると，$\{u,w\}=\{a_2,a_3\}$ であり，$G-\{a_1,v_a,a_2\}$ あるいは $G-\{a_1,v_a,a_3\}$ が非連結になり，(4) の v_b の選び方に矛盾してしまうからである．

(V_2,V_3) :=PART2*(F,a_2,a_3,n_2,n_3,u,w)

を実行する．$u\in V_2$，$w\in V_3$ または $u\in V_3$，$w\in V_2$ の場合は (11) へ，$u,w\in V_2$ または $u,w\in V_3$ の場合は (12) へ行く．

(11) 一般性を失うことなく $u\in V_2$，$w\in V_3$ とする．$G-(V(F)-\{u,w\})$ に辺 (a_1,u)，(a_1,w)，(u,w) を加えたグラフを B とする．

(V_1,V_2',V_3') :=PART3($B,a_1,u,w,$
$n_1,n_2-|V_2|+1,n_3-|V_3|+1$);
return($V_1,V_2\cup V_2',V_3\cup V_3'$)

を実行し終了する．なお B は3-連結である．また $n_F\geq3$ であるから $|V(B)|<|V(G)|$ である．

(12) 一般性を失うことなく $u,w\in V_2$ とする．このとき $V_3\cap\{u,w\}=\phi$ なので条件 (3)″により $|V_3|=n_3$ である．G において F の全ての辺を1点に縮約したグラフを B' として，

(V_1,V_2') :=PART2($B',a_1,u,n_1,|V(B')|-n_1$);
return($V_1,V_2\cup V_2',V_3$)

を実行し終了する．B' は2-連結であることに注意されたい．

end (of **function** PART3);

PART3の計算時間について考察しよう．(1) で終了する場合の計算時間は $O(mn)$ である．(2) で辺 (a_1,v_a) が3-縮約可能がどうかを調べるには $G-\{a_1,v_a\}$ に切断点があるかどうかを調べればよい．これは深さ優先探索を1回行うことで調べることができる．したがって (2) は $O(m)$ 時間で実行できる．また (4) で v_b を見つける部分は (2) と同時に行える．(4) のそれ以外の部分は明らかに $O(m)$ 時間で実行できる．(6) で H' が3-連結かどうかを調べるには $H'-a_1$ が切断点を持つかどうかを調べればよい．したがって (6) は $O(m)$ 時間で実行できる．また (6) で，$H'-a_1$ の全ての切断点を見つけることができるので，(8) で F を見つけるのに要する時間は明らかに $O(m)$ であることがわかる．以上よりPART3を再帰呼び出しする部分と，PART2，PART2*を用いる部分以外に要する時間は $O(m)$ であることがわかる．アルゴリズムは (1) 以外では (3)，(5)，(7)，(9)，(11)，(12) で終了する．いずれの場合もPART3は必ず点数が少なくなったグラフに対し再帰呼び出されることに注意されたい．したがって，PART3が再帰呼び出しされる回数は高々 n 回である．よってアルゴリズム中で付加される辺の本数は $O(n)$ 本である．以上により，アルゴリズムPART3が $O(mn)$ 時間で終了することがわかる．

4. むすび

3節のアルゴリズムPART3は $O(mn)$ 時間で3-連結グラフを3分割する．また2節で触れたように，任意の3-連結グラフ G の3-連結全域部分グラフで辺数が $O(n)$ 本のグラフ G_3 を線形時間で見つけることができる．そこで G のかわりに G_3 にアルゴリズムPART3を適用するようにすれば，PART3は $O(n^2)$ 時間で終了する．

4分割あるいは一般に k 分割の問題については多項式時間アルゴリズムはまだ知られていない．このようなアルゴリズムを見つけることが今後の課題である．

文献

1) Dyer, M. E. and Frieze, A. M.: On the complexity of partitioning graphs into connected subgraphs, Discrete Appl. Math., 10, pp.139-153(1985).
2) Győri, E.: On division of connected subgraphs, Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Combinatorial Coll., 1976, Keszthely), Bolyai-North-Holland, pp.485-494(1978).
3) 今瀬，真鍋：ネットワークにおける障害耐力のある固定ルーチング方式について，信学技報 COMP86-70(1987).
4) Lovász, L.: A homology theory for spanning trees of a graph, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 30, pp.241-251(1977).
5) 宮野：私信.
6) 永持，茨木：k-(辺)連結全域部分グラフを求めるアルゴリズム，情処学研資 89AL10(1989).
7) 鈴木，高橋，西関，宮野，上野：3-連結グラフの3分割アルゴリズム，情報処理 31-5，pp.584-592．