

高速シンプレクティック・レイトレーシング：入れ子宇宙の可視化

佐藤 哲[†], 岩佐 英彦^{††}
竹村 治雄[†], 横矢 直和[†]

シンプレクティック・レイトレーシングは、広大な宇宙空間で正確に光線の軌道を計算し、ブラックホールによって歪んで観測される光景の可視化を可能にした。しかしブラックホールによって引き起こされる入れ子宇宙現象と呼ばれる物理現象を可視化する場合、計算コストの問題から適用が困難であった。そこで本論文では、従来手法での反復計算が必要であった点を改良した高速シンプレクティック・レイトレーシング法を提案する。本論文では、4 次の打ち切り誤差を持つ陽的な光線の軌道計算法を導き、古典的 Runge-Kutta 法や従来のシンプレクティック数値解析により光線の軌道を計算する場合に比べ正確に速く計算できることを示す。そして球状の宇宙空間モデルの中にブラックホールを配置し観測した場合、入れ子宇宙現象が観測できることを示す。

Fast Symplectic Raytracing: Visualization of a Nested Spacetime

TETSU SATOH,[†] HIDEHIKO IWASA,^{††} HARUO TAKEMURA[†],
and NAOKAZU YOKOYA[†]

This paper presents the Fast Symplectic Raytracing which is an improved version of a symplectic raytracing. The symplectic raytracing needs extremely a large amount of time for visualizing a nested spacetime; one of phenomena caused by blackholes. In order to solve this problem, we first derive a fourth order explicit numerical method for computation of orbits of rays. Next, we discuss advantages of the proposed method to the classical Runge-Kutta method and the existing symplectic numerical analysis. Finally, we visualize the nested spacetime under the condition where a blackhole exists in a spherically modeled universe.

1. はじめに

ブラックホールは物理学の研究対象であり、どのようなかを理解するためには複雑な方程式を解かなければならない。しかし、数学や物理学の知識を持たない人でも、ブラックホールに関心がある人は多い。また、物理学者の中でも、ブラックホールを表す方程式を可視化して直感的に理解したいという要求は高い。そこで、ブラックホールをコンピュータグラフィックス (CG) を用いて可視化する研究が行われている¹⁾。ブラックホールを可視化する手法の 1 つは、ブラッ

クホールの強い重力の影響で曲進する光線を忠実に追跡し、歪んで見える光景を提示することで間接的にブラックホールを可視化する重力場光線追跡法^{2),3)}である。重力場光線追跡法では、光線の軌道を表す微分方程式を数値的に解き、観測者の視界に入る光線を調べ、視界に入った光線の色を表示する。ブラックホール周辺では地球上と違い光線は直進せずに曲がって進むため、観測者は歪められた光景を観測する。たとえば図 1 では、中心部分に配置されている元の画像がブラックホールの影響で引き延ばされて見える様子 (左側の図) を示している。点線がブラックホールの重力で曲進する光線の軌跡を、実線が観測者が認識する光線の軌跡を表している。なお、図 1 は NASA の Hubble Space Telescope Public Pictures 中の A Grazing Encounter Between Two Spiral Galaxies をもとに作成したイメージ図である。

重力場光線追跡法によりブラックホールが存在する

[†] 奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科
Graduate School of Information Science, Nara Institute
of Science and Technology

^{††} 株式会社ネットシステムズ
Netsystems, Inc.
現在、科学技術振興事業団 (CREST)
Currently, with Japan Science and Technology Corpo-
ratorin (CREST)
現在、大阪大学サイバーメディアセンター
Currently, with Cybermedia Center, Osaka University

<http://opposite.stsci.edu/pubinfo/pr/1999/41/index.html>

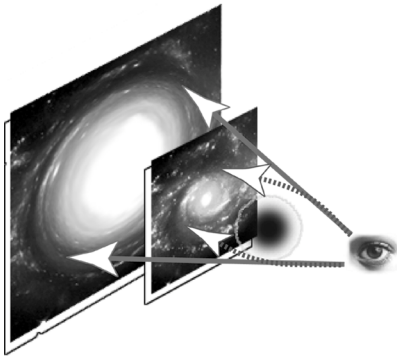


図1 ブラックホールの存在する時空での光線追跡の例

Fig.1 An example of a raytracing in a blackhole space-time. Dotted lines show the curved orbits of the rays influenced by the blackhole. Solid lines show the orbits of the rays that an observer can perceive.

時空の情景が可視化できるようになったが、この手法は大量の光線の軌道を計算するために計算時間が長い、長時間の光線追跡をすると数値計算の誤差が蓄積する、といった問題がある。局所誤差が蓄積していく原因は、定式化する際に使用した数学が古典的な微分幾何学であり、本質的に空間内の局所的な情報を重視する点にある。それに対し、空間の様子を調べる異なるアプローチとしてシンプレクティック構造を重視する研究が比較的近年になって始まった。それらの研究は、数学あるいは物理学ではシンプレクティック幾何学⁴⁾として、数値解析法としてはシンプレクティック数値解析^{5),6)}として同時期に研究が始まった。そして近年、コンピュータ・グラフィックスへ応用する手法が研究されている⁷⁾。文献⁷⁾で提案されたシンプレクティック・レイトレーシング法を用いるとブラックホール時空で正確に光線追跡が可能なが報告されているが、数値計算の結果が収束するまで反復計算を行う陰的な公式を採用しているために計算速度の向上にはつながっていなかった。これは、陽的なシンプレクティック数値解析法を構成することが一般に難しいことに起因している⁸⁾。一方、ブラックホールの存在により引き起こされる興味深い現象のうちの1つに、宇宙の銀河や星が何重にも入れ子構造になって観測される入れ子宇宙現象がある。しかし、計算時間や誤差の問題により入れ子宇宙を可視化あるいは映像化した研究は報告されていない。この状況は、1960年代に重力レンズ効果についての研究^{9),10)}が発表された頃に、技術的に実際の観測は難しいと思われていた状況に似ている。現在では重力レンズ効果はハッブル宇宙望遠鏡などで観測されており、重力場光線追跡法によってCGで再現もされている。

本論文では、反復計算を必要としない陽的な数値解法を用いた高速シンプレクティック・レイトレーシング法を提案する。具体的には、光線の軌道を表す方程式を数値的に解くための陽的なシンプレクティック数値解法を導き、重力場光線追跡法で用いられていたRunge-Kutta法¹¹⁾よりも性能が良いことを示す。同時に、従来のシンプレクティック・レイトレーシング法で使用されていた陰的な数値解法との違いについても調べる。そして実際にブラックホール周辺で光線を追跡し、入れ子宇宙を可視化した結果を示す。入れ子宇宙は、銀河から発せられた光線がブラックホールの周囲を何周もした後に観測者の視界に入ることにより引き起こされる現象である。このため可視化には長期間の光線の追跡が必要であり、提案する高速シンプレクティック・レイトレーシングを用いることが効率的である。

2. ブラックホールの可視化とシンプレクティック数値解析

2.1 重力場光線追跡法によるブラックホールの可視化

通常的光線追跡法では、光は直進すると仮定して、光線の軌道計算には直線の方程式を用いる。しかし、ブラックホール周辺では強い重力により光線は直進するとは限らないので、直線概念を拡張した測地線の微分方程式と呼ばれる常微分方程式を用いる。また、光線追跡によるCG作成技法¹²⁾でしばしば用いられるように、重力場光線追跡法でも光線の発射地点から光線を追跡するのではなく、観測者の視点から光線を追跡する視線追跡を行う。つまり、観測者の視点と視線方向を測地線の微分方程式の初期値とし、数値的に方程式を解いて光線を少しずつ伸ばしながら、空間に配置された物体との交差判定を繰り返すのが、重力場光線追跡法の主要な処理である。

一般に光線追跡によるCG作成は計算時間がかかる。重力場光線追跡法ではCG化の対象である宇宙空間の性質上、2次反射以降は考えないのが普通であり、そのぶん計算時間は減るが、代数方程式である直線の方程式と微分方程式である測地線の方程式を解くのでは計算コストが大きく異なり、結果的に通常的光線追跡法よりも計算時間が増大する。そのために、打ち切り誤差の異なる数値計算結果から誤差を予測して計算精度を変化させる手法³⁾、計算誤差が大きくなった時点で初めから計算し直す手法¹³⁾、曲線を折れ線近似する手法^{14),15)}などが提案されている。しかし、いずれも長期間の光線追跡による誤差の蓄積については議論

されていない。

2.2 シンプレクティック・レイトレーシング

シンプレクティック・レイトレーシングでは、光線はハミルトンの正準方程式に従う力学系である、という立場をとる¹⁶⁾。したがって4次元時空で測地線の方程式を解くことはせず、4次元空間の座標成分 (q_1, q_2, q_3, q_4) および対応する運動量成分 (p_1, p_2, p_3, p_4) から構成される8次元の位相空間内で、次の正準方程式を解くことで光線の軌道を計算する。

$$\begin{cases} \frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{dq_i}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases} \quad (1)$$

ここで H はハミルトニアンと呼ばれるスカラー関数で、 p_j, q_j ($1 \leq j \leq 4$)、およびパラメータ s の関数である。通常はパラメータは時間 t が使われるが、相対論の性質上、時間は空間座標成分と同等に扱われるためにここでは記号を s とした。正準方程式 (1) に対しては、シンプレクティック法やシンメトリック法など誤差を蓄積させずに数値的に微分方程式を解くことができる手法が知られており^{17),18)}、正準方程式を解くアプローチにより Runge-Kutta 型の公式を用いて測地線の微分方程式を解く重力場光線追跡法よりも精度良く長期間の光線追跡が可能である。観測者の視点から光線を伸ばしていき、物体との交差判定をすることでCG画像を生成する全体の処理の流れは、重力場光線追跡法と変わらない。

しかし、従来のシンプレクティック・レイトレーシング^{7),19),20)}で用いられてきた数値解法は陰的な公式であった。陰的な数値解法では

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x f(y_{n+1}, x_n) \quad (2)$$

のように左辺の変数が右辺に含まれているので、収束するまで反復計算が必要となるなど、計算コストが高い。特に相対論を考慮した光線の軌道計算では、8次元空間での解の探索が必要となる。これは、光線の軌道を計算するための専用の数値解法ではなく、あらゆるハミルトン系に適用可能な汎用的な公式を採用したところに原因があると考えられる。したがって、ブラックホール周辺での光線の軌道を支配するハミルトニアンを検討し、専用の数値解析法を開発すれば、より高速に精度の良いシミュレーションが可能となる。

3. 高速シンプレクティック・レイトレーシング

3.1 1次の陽的な数値解法

本節で対象とするハミルトニアンは、以下のものである。

$$H = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \frac{p_t^2}{2} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{p_r^2}{2} - \frac{p_\theta^2}{2r^2} - \frac{p_\phi^2}{2r^2 \sin^2 \theta}. \quad (3)$$

ここで、 (t, r, θ, ϕ) は4次元極座標系の座標成分、 $(p_t, p_r, p_\theta, p_\phi)$ は座標成分に対応する運動量、 r_g はブラックホール半径と呼ばれ、ブラックホールの質量によって決定される定数である。このハミルトニアンは球対称性を持つブラックホールの周囲での光線の軌道を表す。シンプレクティック・レイトレーシングは球対称以外のブラックホールについても適用可能であるが、本論文の目的である入れ子宇宙現象を可視化するためには上記のハミルトニアンで十分である。

高次の陽的な数値解法を導くために、まずオイラー法を用いて1次のシンプレクティック数値解法を構成する。ここでシンプレクティックな数値解法とは、ある瞬間 s_n の状態と、 s_n の状態から数値計算をした結果の s_{n+1} の状態が正準変換²¹⁾になっている計算のことを指す。

一般的に通常の陽的なオイラー法がシンプレクティック数値解法となるとは限らないが、式 (3) で示されるハミルトニアンに対して本節で示すように適用するとシンプレクティック数値解法になることが、外微分形式を用いた直接計算で容易に示すことができる。オイラー法は連続的なパラメータを離散化することで近似的に微分方程式を解く手法で、その際の離散化の幅

$$\tau = s_{n+1} - s_n \quad (4)$$

を刻み幅と呼ぶ。また、ある微分方程式の数値解と解析解を刻み幅でテイラー展開したとき、刻み幅の n 次の項まで一致する場合にその数値解法が n 次の解法であると呼ぶことにする。

ハミルトンの正準方程式 (1) に対しオイラー法を適用すると、

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n - \tau \frac{\partial H}{\partial q} \\ q_{n+1} = q_n + \tau \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases} \quad (5)$$

という式が得られる。ここで、 p は各運動量 $(p_t, p_r, p_\theta, p_\phi)$ を、 q は各極座標成分 (t, r, θ, ϕ) を表す。対象となるハミルトニアンの式 (3) は、第2項の括弧を展開すると5項の和となるので、それを $H = H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5$ と書き、各項別にオイラー法による式を作ることにする。ハミルトニアン (3) に対して直接オイラー法を用いてもシンプレクティックな数値解法は得られないが、分割することでシンプレクティックな数値解法が構成可能である⁶⁾。するとま

ず, $H_1 = (1 - r_g/r)^{-1} p_t^2/2$ に対し

$$\frac{\partial H_1}{\partial p_t} = -\frac{p_t}{(1 - r_g/r)}$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial r} = \frac{r_g}{(r - r_g)^2} \frac{p_t^2}{2}$$

であるから,

$$\begin{cases} t' = t + \tau \frac{p_t}{1 - r_g/r} \\ p_r' = p_r + \tau \frac{r_g p_t^2}{2(r - r_g)^2} \end{cases} \quad (6)$$

が得られる. ここで, 簡単のために $t_{n+1} = t'$, $t_n = t$ と書いた. また, p_t, r 以外の成分で偏微分した方程式も成り立つが, H_1 には独立変数は p_t, r しか含まれておらず, すべて (偏微分項) = 0 の形をしており数値計算をする必要がないので, 今後このような式の記述は省略する. 同様に, $H_2 = -p_r^2/2$ からは

$$r' = r - \tau p_r \quad (7)$$

が, $H_3 = r_g/(2r p_r^2)$ からは

$$\begin{cases} p_r' = p_r \sqrt[3]{\frac{3}{2} r_g \frac{p_r}{r^2} \tau + 1} \\ r' = r \left(\sqrt[3]{\frac{3}{2} r_g \frac{p_r}{r^2} \tau + 1} \right)^2 \end{cases} \quad (8)$$

が, $H_4 = -p_\theta^2/(2r^2)$ からは

$$\begin{cases} p_r' = p_r - \tau \frac{p_\theta^2}{r^3} \\ \theta' = \theta - \tau \frac{p_\theta}{r^2} \end{cases} \quad (9)$$

が, $H_5 = -p_\phi^2/(2r^2 \sin^2 \theta)$ からは

$$\begin{cases} p_r' = p_r - \tau \frac{p_\phi^2}{r^3 \sin^2 \theta} \\ p_\theta' = p_\theta - \tau \frac{\cos \theta p_\phi^2}{r^2 \sin^3 \theta} \\ \phi' = \phi - \tau \frac{p_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \end{cases} \quad (10)$$

が得られる. したがって, 式 (6), (7), (8), (9), (10) を順に計算すれば, 1 次のオーダで陽的に $(t, r, \theta, \phi, p_t, p_r, p_\theta, p_\phi)$ を計算していくことができる.

3.2 2次および4次の数値解法

付録 A.1 に示すように, 式 (6), (7), (8), (9), (10) を次のように組み合わせると, 2 次のシンプレクティック数値解法が構成できる.

- (1) $\tau \rightarrow \tau/2$ として, 式 (6) を計算 (H_1 の評価)
- (2) $\tau \rightarrow \tau/2$ として, 式 (7) を計算 (H_2 の評価)
- (3) $\tau \rightarrow \tau/2$ として, 式 (8) を計算 (H_3 の評価)
- (4) $\tau \rightarrow \tau/2$ として, 式 (9) を計算 (H_4 の評価)

(5) 式 (10) を計算 (H_5 の評価)

(6) $\tau \rightarrow \tau/2$ として, 式 (9) を計算 (H_4 の評価)

(7) $\tau \rightarrow \tau/2$ として, 式 (8) を計算 (H_3 の評価)

(8) $\tau \rightarrow \tau/2$ として, 式 (7) を計算 (H_2 の評価)

(9) $\tau \rightarrow \tau/2$ として, 式 (6) を計算 (H_1 の評価)

この一連の計算を実行することを $S(\tau)$ と書くと, 次の順で計算することにより, 4 次のシンプレクティック数値解法が構成できる (付録 A.2 を参照).

(1) $S(d_1\tau)$

(2) $S(d_2\tau)$

(3) $S(d_1\tau)$

ここで, d_1 と d_2 は付録 A.2 で示す定数である.

3.3 従来手法との比較

前節で導いた 4 次の陽的シンプレクティック法と, 同じ 4 次の古典的 Runge-Kutta 法および 4 次の陰的シンプレクティック法での光線の追跡結果を比較する. シンプレクティック数値解法ではハミルトンの正準方程式を解き, Runge-Kutta 法では測地線の微分方程式を解くことで光線の軌道を計算する. 図 2 と図 3 は, $r = 15.8$ の地点から r 方向に対して跳ね返り角と呼ばれる角度へ光線を発射した場合の光線のハミルトニアンの変化を示している. 横軸が計算回数, 縦軸がハミルトニアンの変化を示している. 計算回数とは, 2.1 節で説明したような光線を伸ばす回数を指し, 演算の回数のことではない. 光線の軌道を計算する場合, ハミルトニアンの値はゼロになることが理論的に要請されるため, ゼロからのずれが誤差であると考えられる. 図 2 は, 数値計算の刻み幅 τ が 0.02 の場合である. 実線 (丸印) で示される陰的シンプレクティック法では, 非常に小さなゆらぎがあるものの計算回数 25,000 回までおよそゼロを保っている. 点線 (四角印) で示される Runge-Kutta 法でも同様である. 破線 (三角印) で示される陽的シンプレクティック法は誤差によるゆらぎが見られるが, ゆらぎは 10^{-12} 程度で刻み幅に比べゼロに近いといえる. 図 3 は刻み幅を 0.05 に設定して 2 倍以上の計算時間短縮を試みたものである. この場合, Runge-Kutta 法による計算だけがハミルトニアンの値がマイナス方向に発散してしまっている. したがって Runge-Kutta 法による光線追跡法は, 刻み幅のとり方によっては不安定になることがあるといえる. Runge-Kutta 法と陽的シンプレクティック法では, 図 2 の計算は 20 分以内に終了し, 図 3 の計算は 5 分以内に終了する. 陰的シンプレクティック法では, 図 2 の計算は 8 時間以上, 図 3 の計算は 6 時間以上の計算時間を必要とする. したがって, 刻み幅による安定さと計算時間の短さの両方を考

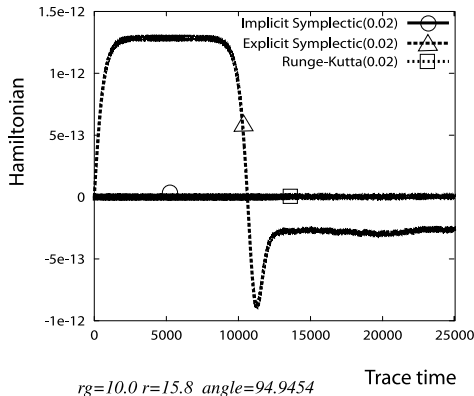


図2 ブラックホール周辺での光の軌道計算における Runge-Kutta 法とシンプレクティック法の比較 ($r_g = 10$, $\tau = 0.02$ の場合)

Fig. 2 Comparison of Runge-Kutta method and Symplectic methods in computing orbits of rays near a blackhole ($r_g = 10$, $\tau = 0.02$). The vertical axis shows a distance from the origin and the horizontal axis shows calculation periods.

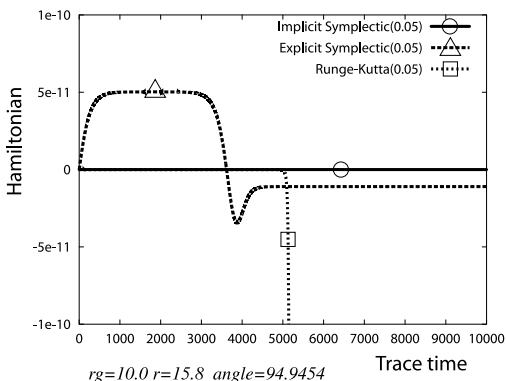


図3 ブラックホール周辺での光の軌道計算における Runge-Kutta 法とシンプレクティック法の比較 ($r_g = 10$, $\tau = 0.05$ の場合)

Fig. 3 Comparison of Runge-Kutta method and Symplectic methods in computing orbits of rays near a blackhole ($r_g = 10$, $\tau = 0.05$). The vertical axis shows a distance from the origin and the horizontal axis shows calculation periods.

慮する場合、提案手法である陽的シンプレクティック法が優位である可能性がある。

この実験では数値計算機能を持つソフトウェア Mathematica を用いて計算した。Mathematica では任意の計算精度を設定可能なため、あえて通常の計算機言語の計算に近くなるように小数点以下 16 桁の精度に設定した。使用した計算機は sgi 社の onyx (R10000, 195 MHz) で、手法の相对比较が目的なので並列処理はせず、単一の CPU のみで計算した。時間の計測は CPU タイムを測定する Mathematica の関数 Timing

を用いて計算時間を調べたが、計算機を独占的に使用できる環境ではなく、Timing 関数の測定結果も正確さの保証はないので、上記の測定時間は精密なものではない。しかし本実験により、同じ 4 次の打ち切り誤差を持つ数値解析法でも手法により誤差の影響や計算速度が大きく異なってくることは確認できる。

4. 入れ子宇宙の可視化例

ブラックホールにより引き起こされる入れ子宇宙を可視化するために、図 4 に示すような世界モデルを設定する。座標系の原点に球対称なブラックホールが 1 つだけ存在するとし、天球の中の原点以外の場所に観測者を配置する。原点から十分遠方に球状の天球マップを配置し、観測者は天球マップ上の銀河や星が歪む様子を観測することで、間接的にブラックホールを見ることができる。数値計算の刻み幅を適切に設定すれば本論文で取り上げているいずれの従来手法でもブラックホールの可視化は可能と思われるが、数値計算の信頼性と計算速度を考慮し、以後、陽的シンプレクティック・レイトレーシング法を用いて画像を生成する。

まず、ブラックホールが存在しない状態で観測される画像を図 5 に示す。画像データは、NASA が配布している Hubble Space Telescope Public Pictures のうち、Hubble Spies Giant Star Clusters Near Galactic Center (STScI-PRC99-30) を用いた。次に、ブラックホールが存在する場合に観測される画像が図 6 である。光が吸い込まれてしまって黒くなっている、中央付近の丸い部分がブラックホールを表している。図 5 のような状況設定でのレンダリングには、重力場光線追跡法 (測地線の微分方程式を Runge-Kutta 法で解く手法) では約 39 分、陽的シンプレクティック・レイトレーシング法では約 27 分の計算時間がかかっている。図 6 では、重力場光線追跡法では約 39 分、陽的シンプレクティック・レイトレーシング法では約 33 分である。数値計算の刻み幅はいずれも 0.01 で、ブラックホール半径は $r_g = 0.5$ である。参考までに、刻み幅を 0.01 に設定して陰的シンプレクティック・レイトレーシング法を用いて図 6 を作成した場合の所要時間は約 30 時間であった。前節と同様、使用した計算機は他のユーザとの共有機器であるために計測時間は計算機の動作状況により異なることがあり、あまり正確な測定結果ではない。本論文で扱うブラックホー

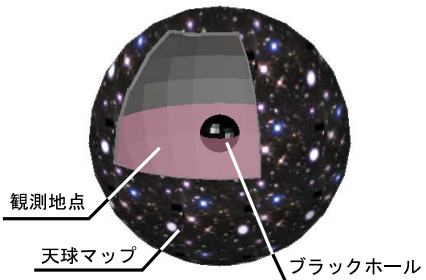


図 4 設定する世界モデル

Fig. 4 Spherically modeled spacetime. A blackhole is located at the origin of the coordinate. An observer is assumed to be in the spherical spacetime surrounded by a map of galaxies.

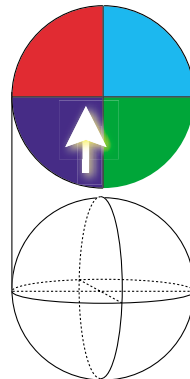


図 7 カラーリングした天球

Fig. 7 Celestial sphere painted with simple four colors.



図 5 ブラックホールが存在しない場合の観測画像

Fig. 5 Computed image with no blackhole.

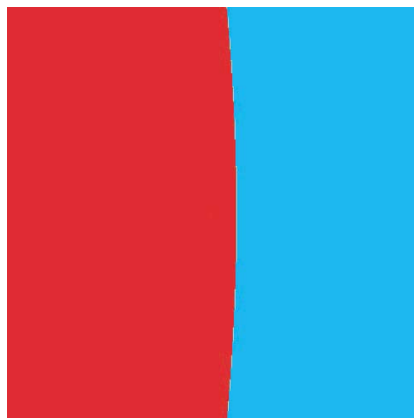


図 8 ブラックホールが存在しない場合

Fig. 8 Computed image with no blackhole in the spacetime with a painted celestial sphere.

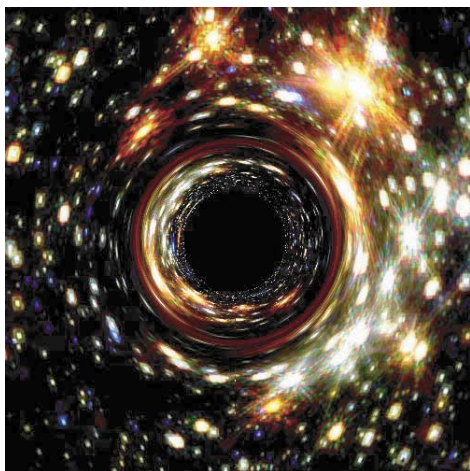


図 6 ブラックホールが存在する場合の観測画像

Fig. 6 Computed image in the case that a blackhole exists in the spacetime.

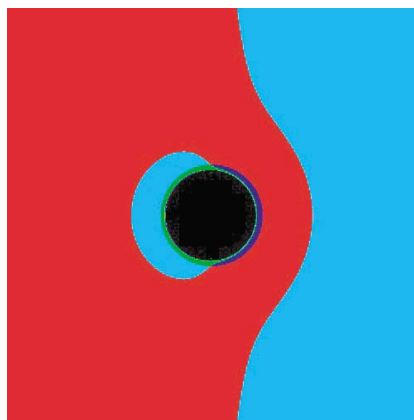


図 9 ブラックホールが存在する場合

Fig. 9 Computed image in the case that a blackhole exists in the spacetime with a painted celestial sphere.

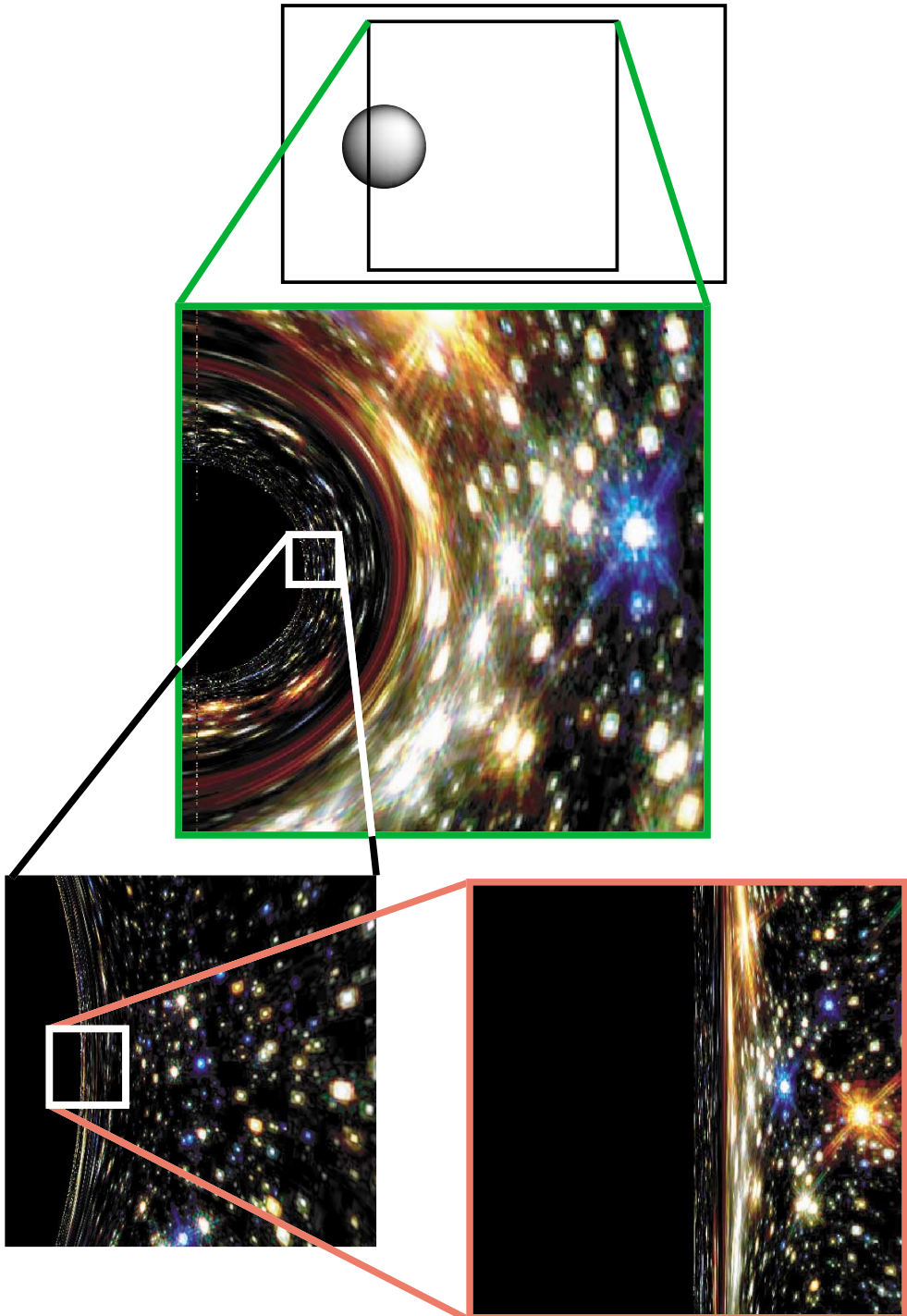


図 10 入れ子宇宙の可視化例

Fig. 10 Visualization example of the nested spacetime.

ル時空では、計算誤差により光線がブラックホールに吸い込まれて計算が打ち切られることが多いと計算時間が短くなったり、長期間の追跡をしていると誤差が蓄積するなど、計算時間について一概に比較することはできない。しかし 3.3 節で調べたように、従来の測地線の微分方程式を Runge-Kutta 法で解く手法は不安定になる場合があり、また陰的シンプレクティック・レイトレーシング法は計算時間が長いことから、本論文の目的である入れ子宇宙を可視化する場合には陽的シンプレクティック・レイ・トレーシング法が適している。

図 6 は確かに写実的な画像であるが、それゆえにどこがどう歪んでいるのかよく分からない面がある。そこで、天球に銀河の写真をマッピングする代わりに、図 7 のように単純に色分けしたカラーマップをマッピングした宇宙を考える。図 7 の上部が、天球を上から見下ろした場合を表している。矢印は、観測者の位置と観測方向を表している。するとブラックホールが存在しない場合、矢印方向に観測すると、図 8 のように正面に左半分が赤、右半分が水色の壁が観測される。この宇宙空間にブラックホールを配置した場合が図 9 である。観測者の後方に存在するはずの青や緑が正面に見えていることが分かる。また、正面の水色の分布の様子から、図 6 においてブラックホールのすぐ左側に歪んで見える明るい銀河群が画像中の右半分の銀河と同一であることが理解できる。

ところで、入れ子宇宙現象により多重に見える銀河は、大きさが指数関数的に異なってくるので図 6 や図 9 では目視では確認が難しい。そこで、図 6 の描画において、観測者の前方に設定されているスクリーンを部分ごとに拡大したものが図 10 である。観測者の視界の中の光景を少し拡大したものが緑枠の画像であり、その画像の中のブラックホールの近傍をさらに拡大したものが黒枠、最も大きく拡大したものが赤枠で示される画像である。緑枠で示された画像の右側には青い星が見え、青い星の左側には白く光る星が、左上にはオレンジ色の星が見える。これらの星から発せられた光が、ブラックホールを周回してから観測者の視界に入ることにより見えるのが赤枠の画像である。赤枠の画像中央部の小さな青い星と、緑枠画像内の青い星は同一のものである。赤枠内の青い星の左側には白い星やオレンジ色の星が存在するが、縦方向に引き延ばされている。このようにブラックホールに近づくほど急激に引き延ばされた画像が生成されるので、赤枠の画像は緑枠の画像に比べ、縦方向に 200 倍ほど圧縮してある。このように同一の銀河が何度も現れる現

象が入れ子宇宙現象である。

以上の画像生成にはすべて前述の sgi 社の onyx を用いており、OpenMP により 16CPU を並列処理に使用した。

5. おわりに

本論文では、ブラックホールを可視化するために、高速に精度良く計算しながら光線追跡法により CG 画像を作成する高速シンプレクティック・レイトレーシング法を提案した。本論文の中で、本手法の有効性を調べるために、重力場光線追跡法で用いられている Runge-Kutta 法および従来のシンプレクティック・レイトレーシング法で用いられている陰的シンプレクティック法との比較をした。入れ子宇宙現象を可視化する際に必要となる長期間の光線追跡をしたところ、Runge-Kutta 法では不安定になる状況でも提案手法では安定して計算可能なことが分かった。また、ごく小さなゆらぎを許せば、陰的な計算式を用いる陰的シンプレクティック法よりも高速に計算可能であった。刻み幅を大きくとつても Runge-Kutta 法に比べて良好な計算結果が出る点は、陰的シンプレクティック法と同様であった。そして本手法を用いて、球状にモデル化した宇宙の中にブラックホールと観測者を配置し、観測者の視界に写る入れ子宇宙現象の CG 画像を作成することができた。今後、重力の強いところでは特に精密に計算する刻み幅変化型の数値計算法の開発や、計算が高速になったことをふまえた可視化の表現手法の改良などの研究が必要である。

謝辞 本研究の一部は、科学技術振興事業 (JST) の戦略的基礎研究推進事業 (CREST)「高度メディア社会の生活情報技術」プログラムの支援による。

参考文献

- 1) Anninos, P., Bajuk, M., Berntein, D., Seidel, E., Smarr, L. and Hobill, D.: Visualizing Black Hole Space-times, *IEEE CG & A.*, Vol.13, No.1, pp.12-14 (1993).
- 2) 山下義行: ブラック・ホールのコンピュータグラフィックス—光線追跡法の曲がった 4 次元時空への拡張, 情報処理学会論文誌, Vol.30, No.5, pp.642-651 (1989).
- 3) 佐藤 哲, 若佐英彦, 竹村治雄, 横矢直和: 物体の相対論的運動の重力場光線追跡法による可視化, 信学技報 IE95-126 (1996).
- 4) 深谷賢治: シンプレクティック幾何学, 岩波書店 (1999).

- 5) Sanz-Serna, J.: Symplectic Intergrators for Hamiltonian Problems: An Overview, *Acta Numerica*, Vol.1, pp.243–286 (1991).
- 6) Yoshida, H.: Recent Progress in the Theory and Application of Symplectic Integrators, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol.56, pp.27–43 (1993).
- 7) 佐藤 哲, 岩佐英彦, 竹村治雄, 横矢直和: シンプレクティック・レイ・トレーシング: ブラックホール時空での光線追跡, 情報処理学会論文誌, Vol.42, No.3, pp.456–464 (2001).
- 8) Mikkola, S. and Tanikawa, K.: Explicit Symplectic Algorithms for Time-transformed Hamiltonians, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol.74, pp.287–295 (1999).
- 9) Liebes, S.: Gravitational Lenses, *Physical Review*, Vol.133, No.3B, pp.835–844 (1964).
- 10) Refsdal, S.: The Gravitational Lens Effect, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, No.128, pp.295–306 (1964).
- 11) Enright, W.H., Higham, D.J., Oweren, B. and Sharp, P.W.: A Survey of the Explicit Runge-Kutta Method, Technical Report 291/94, Dept. Computer Science, Univ. of Toronto (1995).
- 12) Whitted, T.: An Improved Illumination Model for Shaded Display, *Comm. ACM*, Vol.23, No.6, pp.343–349 (1980).
- 13) 山下義行: 相対性理論のコンピュータグラフィックス, 日本物理学会誌, Vol.53, No.11, pp.819–825 (1998).
- 14) Gröller, E.: Nonlinear Ray Tracing: Visualizing Strange Worlds, *The Visual Computer*, Vol.11, pp.263–274 (1995).
- 15) Nollert, H., Kraus, U. and Ruder, H.: Visualization in Curved Spacetimes. I. Visualization of Objects via Four-Dimensional Ray-Tracing, *Relativity and Scientific Computing*, chapter16, Springer-Verlag, Berlin (1996).
- 16) Misner, C., Thorne, K. and Wheeler, J.: Metric Structure and Hamiltonian or “Symplectic Structure” Compared and Contrasted, *Gravitation*, p.126, W.H. Freeman and Co. (1973).
- 17) 吉田晴夫ほか: 古典力学の輝き, 数理科学, Vol.33, No.6, pp.5–65 (1995).
- 18) 吉田晴夫ほか: ハミルトン力学系の展開, 数理科学, Vol.37, No.8, pp.5–56 (1999).
- 19) 佐藤 哲, 岩佐英彦, 竹村治雄, 横矢直和: シンプレクティック・レイ・トレーシングによるブラックホールの可視化, 情報処理学会全国大会, No.2E-3-4, pp.69–74 (1999).
- 20) 佐藤 哲, 岩佐英彦, 竹村治雄, 横矢直和: シンプレクティック・レイ・トレーシング—曲がった光線によるブラックホールの可視化, 日本応用数理学会 1999 年度年会予稿集, pp.120–121 (1999).
- 21) 木村利栄, 菅野礼司: 正準理論, 微分形式による解析力学, pp.82–108, マグロウヒル (1988).
- 22) 佐藤 光: 群と物理, pp.55–56, 丸善株式会社 (1992).
- 23) 大貫義郎, 鈴木増雄, 柏 太郎: 経路積分の方法, pp.174–197, 岩波書店 (1992).
- 24) Yoshida, H.: Construction of Higher Order Symplectic Integrators, *Physical Letter A*, Vol.150, pp.262–268 (1990).

付 録

A.1 2 次の陽的な解法の導出

陽的な数値解法を導くために $z = (q_1, \dots, q_4, p_1, \dots, p_4)$ とおくと, 正準方程式の解はハミルトニアン H に対応する微分作用素 D_H を導入して形式的に

$$z(\tau) = e^{\tau D_H} z(0) \quad (11)$$

と書けることが知られている⁶⁾. つまり, $e^{\tau D_H}$ という項が

$$e^{\tau D_H} : z(0) \mapsto z(\tau) \quad (12)$$

という写像を意味する. また, ハミルトニアンが複数の項の和である場合, たとえば $H = A + B$ であるなら

$$z(\tau) = e^{\tau(D_A + D_B)} z(0) \quad (13)$$

となる. 式 (3) は, 第 2 項を展開すると 5 つの項の和となるので, $H = A + B + C + D + E$ とおくと

$$z(\tau) = e^{\tau(D_A + D_B + D_C + D_D + D_E)} z(0) \quad (14)$$

となる. 式 (14) は, 式 (12) を考慮すると, 式 (3) から導出されるハミルトンの正準方程式が解析的に解けた場合の表現である. しかし解析解を求めることは不可能なので,

$$e^{\tau(D_A + D_B + \dots)} = e^{\tau f(D_A)} e^{\tau g(D_B)} \dots \quad (15)$$

のように分解することにより, 真の解を近似する手法が一般的である.

ところで, D_A, D_B, \dots は微分作用素なので一般に非可換であり,

$$e^{D_A + D_B} = e^{D_A} e^{D_B} \quad (16)$$

とは限らない. たとえば 3 項の場合, $e^A e^B e^C = e^Z$ となる Z は

$$\begin{aligned} Z &= A + B + C \\ &+ \frac{1}{2} ([A, B] + [A, C] + [B, C]) \\ &+ \frac{1}{12} ([A, [A, B]] + [A, [A, C]] + \dots) \end{aligned} \quad (17)$$

となる. ここで, 大括弧は

$$[A, B] \equiv AB - BA \quad (18)$$

で定義される括弧積である．括弧積には次のような性質があり，しばしばリー代数の定義に用いられる²²⁾．

- (1) $[xA + yB, C] = x[A, C] + y[B, C]$ ただし $x, y \in \mathbf{R}$ (双線形性)
- (2) $[A, B] = -[B, A]$ (反対称性)
- (3) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (ヤコビの恒等式)

ハミルトニアンが5項の和の式(14)を展開するために，

$$S(\tau) = e^{\tau(A+B+C+D+E)} \tag{19}$$

とおく．簡単のために， D_A を A ， D_B を B などと書く．対称分解²³⁾と呼ばれる手法を用いて $S(\tau)$ を τ について2次近似するために，

$$S(\tau) = e^{v\tau A} e^{w\tau B} e^{x\tau C} e^{y\tau D} e^{z\tau E} \times e^{y\tau D} e^{x\tau C} e^{w\tau B} e^{v\tau A} + O(\tau^3)$$

とおいて，2次まで近似可能となる係数 (v, w, x, y, z) を計算する．すると，式(17)より

$$S(\tau) = e^{\tau R_1 + \tau^2 R_2 + \tau^3 R_3 \dots} + O(\tau^3) \tag{20}$$

と書けることが分かる．ここで， $R_1 = 2vA + 2wB \dots + zE$ ， $R_2 = 1/2([vA, wB] + [vA, xC] \dots)$ ，そして R_3 は $[A, [A, B]]$ など2重の括弧積から構成される項の和である．ここで，

$$S(-\tau) = e^{-v\tau A} e^{-w\tau B} e^{-x\tau C} e^{-y\tau D} e^{-z\tau E} \times e^{-y\tau D} e^{-x\tau C} e^{-w\tau B} e^{-v\tau A}$$

となることを考えると，対称性を持たせたことにより

$$S(\tau)S(-\tau) = 1 \tag{21}$$

となることが分かる．これは，

$$e^{v\tau A} e^{-v\tau A} = e^{v\tau A - v\tau A} = 1 \tag{22}$$

など，非可換な微分演算子が自分自身とは可換と考えられることから導ける．すると，式(20)を用いると

$$S(\tau)S(-\tau) = e^{\tau^2 R_2 + \tau^4 R_4 \dots} = 1 \tag{23}$$

であるから， $R_2 = R_4 = R_6 = \dots = 0$ であることが分かる．したがって τ について1次まで元の式(19)と一致していれば，自動的に2次までも一致する．よって

$$S(\tau) = e^{v\tau A} e^{w\tau B} e^{x\tau C} e^{y\tau D} e^{z\tau E} \times e^{y\tau D} e^{x\tau C} e^{w\tau B} e^{v\tau A} = e^{\tau R_1 + \tau^3 R_3 \dots} \tag{24}$$

が τ について1次の項まで元の式(19)と一致するには R_1 のみ考慮すればよく， $R_1 = 2vA + 2wB + 2xC + 2yD + zE$ と式(19)より

$$\begin{aligned} 2v &= 1 \\ 2w &= 1 \\ 2x &= 1 \\ 2y &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

が条件となる．つまり，

$$S(\tau) = e^{\frac{1}{2}\tau A} e^{\frac{1}{2}\tau B} e^{\frac{1}{2}\tau C} e^{\frac{1}{2}\tau D} e^{z\tau E} \times e^{\frac{1}{2}\tau D} e^{\frac{1}{2}\tau C} e^{\frac{1}{2}\tau B} e^{\frac{1}{2}\tau A} \tag{25}$$

は式(19)を2次のオーダで近似する．式(25)は，3.2節前半のアルゴリズムの証明となる．

A.2 4次の陽的な解法の導出

本節では，Yoshida²⁴⁾のアプローチで2次の数値解法から4次の数値解法を構成する．前節と同様に対称分解を考え，

$$S_4(\tau) = S(d_1\tau)S(d_2\tau)S(d_1\tau) \tag{26}$$

が，式(19)を τ について4次まで近似するような係数を探す．式(24)より

$$S(d_1\tau) = e^{d_1\tau R_1 + d_1^3\tau^3 R_3 \dots} \tag{27}$$

であるから，

$$\begin{aligned} S_4(\tau) &= S(d_1\tau)S(d_2\tau)S(d_1\tau) \\ &= e^{d_1\tau R_1 + d_1^3\tau^3 R_3 \dots} e^{d_2\tau R_1 + d_2^3\tau^3 R_3 \dots} \\ &\quad \times e^{d_1\tau R_1 + d_1^3\tau^3 R_3 \dots} \\ &= e^{(2d_1 + d_2)\tau R_1 + (2d_1^3 + d_2^3)\tau^3 R_3 \dots} \end{aligned}$$

となり，これが式(19)と τ について4次の項まで一致するための条件は

$$\begin{cases} 2d_1 + d_2 = 1 \\ 2d_1^3 + d_2^3 = 0 \end{cases} \tag{28}$$

である．式(28)は3つの解を持つが，実数のものは次の一組である．

$$\begin{cases} d_1 = \frac{4 + 2^{2/3} + 2^{4/3}}{6} \\ d_2 = -\frac{(1 + 2^{1/3})^2}{3} \end{cases} \tag{29}$$

この定数を用いて3.2節後半のアルゴリズムを実行すると，4次のシンプレクティックな陽的な数値解法となる．

(平成12年7月21日受付)

(平成13年9月12日採録)



佐藤 哲 (正会員)

1992年釧路工業高等専門学校情報工学科卒業。1994年千葉大学工学部情報工学科卒業。1996年奈良先端科学技術大学院大学大情報科学研究科博士前期課程修了。同年同大学情報科学研究科博士後期課程入学。2001年同大学情報科学研究科博士後期課程修了。同年科学技術振興事業団戦略的基礎研究推進事業研究員。科学的可視化、数値解析、画像処理、HPC等の研究に従事。ACM, IEEE, SIAM, 日本応用数理学会各会員。1999年第59回情報処理学会全国大会大会奨励賞受賞。博士(理学)。



岩佐 英彦

1990年大阪大学工学部通信工学科卒業。1994年同大学院博士後期課程中途退学。同年奈良先端科学技術大学院大学情報科学センター助手。1995年同大学情報科学研究科助手。在職中は人工知能、画像検索、情報可視化の研究に従事。2000年株式会社ネットシステムズ入社。現在に至る。ネットワーク性能管理、セキュリティ診断の業務に従事。ACM, 電子情報通信学会各会員。



竹村 治雄 (正会員)

1987年大阪大学大学院基礎工学研究科博士後期課程単位取得退学。同年(株)ATR入社。ATR通信システム研究所勤務。1994年奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科助教授。1998~1999年カナダ・トロント大学客員助教授。2001年大阪大学サイバーメディアセンター教授。3次元ユーザインタフェース, CSCW, 仮想現実等の研究に従事。IEEE, ACM, HFES, 電子情報通信学会, 映像情報メディア学会, ヒューマンインタフェース学会, 日本バーチャルリアリティ学会各会員。工学博士。



横矢 直和 (正会員)

1979年大阪大学大学院基礎工学研究科博士後期課程修了。同年電子技術総合研究所入所。1986~1987年カナダマギル大学客員教授。1992年奈良先端科学技術大学院大学情報科学センター教授。現在, 同大学情報科学研究科教授, 情報科学センター長(併任)。画像処理, コンピュータビジョン, 複合現実等の研究に従事。IEEE, 人工知能学会, 映像情報メディア学会, 電子情報通信学会, 日本認知学会, 日本バーチャルリアリティ学会, 画像電子学会各会員。工学博士。