7C－7

# 充足可能性問題の代数化
## －同次証明方程式による判定法－

山崎　勇
(株) 東芝　総合研究所

## 1．まえがき

筆者は推論の代数化によって、充足可能性問題がある加群における一次方程式（証明方程式）の可解問題に変換できることをすでに示し、これを代数的証明原理と名付けた[1]。この代数的証明原理が成立するための十分条件として、充足可能性の判定対象である節集合に対して陰Horn条件が存在していた。その後この代数的証明原理がFarkasの定理に似ていることからその関係を追及した結果、代数的証明原理を再証明し、かつその成立条件としていくつかの類似の条件とそれらの関係が明らかになった。さらにそれらを整理すると、同次一次方程式（同次証明方程式）の解の様子から充足可能性を判定する方法としてまとめられる。そこでここではこれらの結果について概要を報告する。なお次の記号を用いる。

$n$…節集合の節の個数，$\lambda$…命題記号の個数，
$Z$…整数の全体，$I=\{1,2,\cdots,n\}$，
$K=\{1,2,\cdots,\lambda\}$，$K_0=K\cup\{0\}$，
$J=\{1,2,\cdots,m\}$，（$m$…任意の数）。

## 2．推論加群Dと代数的導出原理

$\lambda$個の命題記号$P_k$ $(k\in K)$を含む、命題論理の節集合$S=\{c_i\}_{i\in I}$を考える。$\Gamma=\{P_k\}_{k\in K}$とし、$\Gamma$の命題記号を用いて作られる節集合の全体をCと記す。また「基準命題」と呼ぶ命題記号$P_0$を考え、これを含めた命題記号の集合を$\Gamma_0$と記す。

命題記号$P_k$を固定したとき、$P_k\cdot z$ $(z\in Z)$なる表現の全体：$D_k=\{P_k\cdot z\mid z\in Z\}$は、Zの算法を通して右Z加群でもある。そこでこれらの$D_0,D_1,D_2,\cdots,D_\lambda$の直和をDと定義し、「推論加群」と呼び、その元を「文」と呼ぶ。

$$D=\{\Sigma_{k\in K_0}P_k\cdot z_k\mid P_k\in\Gamma_0,\ z_k\in Z\}$$

文dへの$z\in Z$の右作用を$d\cdot z$と記す。

**【節と文の間の変換】**　$L_j$をリテラル（$A_j$または$\sim A_j$，$A_j\in\Gamma$，$j\in J$）としたとき、写像d: C→Dと写像c: D→Cとを次により定義する。

$$d(\vee_{j\in J}L_j)=\Sigma_{j\in J}\chi(L_j)-P_0$$

$$\begin{cases}\chi(A_j)=A_j\\ \chi(\sim A_j)=P_0-A_j\end{cases}$$

$$c(\Sigma_{j\in J}A_j\cdot z_j+P_0\cdot z_0)=\vee_{j\in J}c(A_j\cdot z_j)$$

$$\begin{cases}c(A_j\cdot z_j)=A_j & \cdots\cdots z_j>0\\ c(A_j\cdot z_j)=\sim A_j & \cdots z_j<0\end{cases}$$

**【文の底数】**　次の整数を文$d=\Sigma_{k\in K_0}P_k\cdot z_k$の「底数」と呼び、$\beta(d)$と記す。

$$\beta(\Sigma_{k\in K_0}P_k\cdot z_k)=z_0+\Sigma_{k\in K,\ z_k<0}z_k$$

cが節なら、$\beta(d(c))=-1$が成り立つ。

**【代数的導出原理】**　節集合Sから作られる次の非負一次結合：$d=\Sigma_{i\in I}d(c_i)\cdot z_i$ $(z_i\geq 0)$の底数が$-1$以下ならば、$c(d)$はSの論理的帰結である。

## 3．Horn条件と代数的証明原理

**【配点と得点】**　準備のため次の定義を行う。

**命題記号へのW配点w：**　$P_0$には1を、他の命題記号へは0または1のいずれかを与えることを「W配点」と呼び、wなどと記す。

**命題記号へのV配点v：**　$P_0$には1を、他の各命題記号へは任意の整数を与えることを「V配点」と呼び、vなどと記す。

**命題記号へのY配点y：**　$P_0$には$>0$なる整数を、他の各命題記号へは任意の整数を与えることを「Y配点」と呼び、yなどと記す。

**文の得点：**　$d=\Sigma_{k\in K_0}P_k\cdot z_k$において、これをZでの式と見て、ある配点に従って整数を$P_k$に代入し、この式を計算して得られる整数を、その配点における文dの「得点」と呼ぶ。

なおこれらの用語法によれば、$S=\{c_i\}_{i\in I}$が充足可能であるとは『全ての$d(c_i)$の得点が$\geq 0$となるW配点が存在する』ということに他ならない。

**【Horn条件】**　節集合$S=\{c_i\}_{i\in I}$に対し、

**陰Horn条件：**　全ての$d(c_i)$の得点が$\leq 0$となるW配点wが存在する

---

Algebrization of Satisfiability Problem
Isamu YAMAZAKI
Toshiba Research and Development Center.

**拡大Horn条件**：全ての$d(c_i)$の得点が$\leqq 0$となるV配点vが存在する

**一般Horn条件**：各Y配点yごとにV配点$f(y)$を決め、どの$d(c_i)$についても、yによる得点が$\geqq 0$ならば$f(y)$による得点も$\geqq 0$であるようにできる。

節集合Sが陰Horn条件を満たしていれば拡大Horn条件を満たしている。また、節集合Sが拡大Horn条件を満たしていれば一般Horn条件を満たしている。

**【代数的証明原理】** 節集合Sが一般Horn条件を満たしていれば、(A) Sが充足不可能である、ための必要十分条件は、

(B) 同次一次方程式（同次証明方程式）：

$$\Sigma_{i\in I}\, d(c_i)\cdot z_i = -P_0\cdot z \qquad (z_i, z\in Z)$$

に$z_i \geqq 0$、$z>0$なる解が存在する。

ことである。またこれは$d(c_i)$のある性質を利用すると次の条件と同等であることが分かる。

(C) 一次方程式（証明方程式）：

$$\Sigma_{i\in I}\, d(c_i)\cdot z_i = -P_0 \qquad (z_i \in Z)$$

に$z_i \geqq 0$なる解が存在する。

なお (C)の解$z_i$は、Sから導出により空節を導く際に節$c_i$を使用する回数になっている。

報告(1) での代数的証明原理の成立条件は陰Horn条件であったが、ここでは一般Horn条件に拡大されている。また一般Horn条件は(A) が(B) と同等であるための必要十分条件でもある。

## 4．同次証明方程式による充足可能性の判定

同次証明方程式において$z_i \geqq 0$なる条件は不変のまま、$z>0$の条件を$z=0$，$z<0$と変化させた場合に、その時の解の有無のパターンは6通りある。これらの各々に対し、充足可能性を調べると、次のようになっていることが判明した。

| | 同次証明方程式に | | | Sの充足可能性 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $z>0$ | $z<0$ | $z=0$ | Sが一般Horn条件を | |
| | なる解 | なる解 | なる解 | 満たす | 満たさず |
| ① | 有 | 無 | 有 | 不能 | 不能 |
| ② | 有 | 無 | 無 | 不能 | 不能 |
| ③ | 無 | 無 | 有 | 可能 | 可能 |
| ④ | 無 | 無 | 無 | 可能 | 不能 |
| ⑤ | 無 | 有 | 有 | 可能 | 不能 |
| ⑥ | 無 | 有 | 無 | 可能 | 不能 |

④での充足可能性の判定は拡大Horn条件によって可能であるとの証明が得られている。これを陰Horn条件にまで緩められるものと予想されるが、まだその証明は得られていない。拡大Horn条件は①②③④でだけ成立し得るが、①②③では充足可能性が確定しているから、もしこの予想が正しければ拡大Horn条件の存在意義はない。また⑤⑥での充足可能性の判定には一般Horn条件が必要である。

**【同次証明方程式の解の判定の時間計算量】** Sにおいて節の個数nは命題記号の個数λより多いと仮定して良い。そのとき同次証明方程式に$z>0$，$z<0$，$z=0$なる解が有るかどうかは、

(1) 前進消去・後退代入によって同次証明方程式を解き、全未知数を$n-\lambda$個の変数で表す。

(2) この表現を順次変形して、全ての未知数の表現が非負一次結合で表現されるようにする。（途中でこのような表現が不可能であることが分かれば、④の場合であることが分かる）

(3) 得られた表現から$z>0$，$z<0$，$z=0$となり得るかどうかを判定する。

の手順で判定できる。この時間計算量のオーダは、(1) が$n\lambda^2$、(2) が$n\lambda(n-\lambda)$、(3) がnであるので、総合して$n\lambda(n+\lambda)$であり、λが固定されていれば$n^2$のオーダである。

**【Horn条件判定の時間計算量】** 陰Horn条件は$n^2$のオーダで判定できる[1]。一般Horn条件の判定手順は明らかでないが、もしこれが多項式時間で判定可能であると、NP完全である充足問題が上記の方法によりP問題となってしまうので、多項式時間の判定手順は存在しないものと思われる。

## 5．あとがき

先に得ていた代数的証明原理を発展させ、同次証明方程式の解の様子により充足可能性を判定する方法について述べた。④では陰Horn条件で充足可能性が判定できるのではないかという予想を証明することと、一般Horn条件の判定手順を明らかにすることが今後の課題として残されている。

〈参考文献〉

(1) 山崎勇：推論の代数化と代数的証明原理；第2回人工知能学会全国大会，1-3，pp. 27-30 (1988)