6K−5

積型積分の自動積分法 べき型特異点の場合*

長谷川 武光† 鳥居 達生‡
福井大学工学部 名古屋大学工学部

1 はじめに

有限区間(一般性を失うことなく $[-1,1]$ とおく)上の、滑らかな関数 $f(t)$ と特異関数 $K(t)$ との積の積分(積型積分)

$$\int_{-1}^{1} K(t)\, f(t)\, dt$$

の近似値を求めることは、通常の積分則では困難である。ここで $K(t)$ として、例えば $|t-c|^\alpha (\alpha > -1)$、$\log|t-c|$ $(-1 \le c \le 1)$、主値 $(t-c)^{-1}$などの特異関数や激しい振動関数 $e^{i\omega t}$ $(\omega \gg 1)$ である。特異点が積分区間の端点のとき、一般的に有効な積分則 [1] があるが、区間内に特異点をもつ積分には個別の扱いが要求される。

本論文では、我々が発表してきた一連の積型積分の自動積分法(例えば [2])の続きとして、特にべき型特異関数 $K(t) = |t-c|^\alpha$ $(\alpha > -1)$ に対する**不定積分**

$$Q(x,y,c) = \int_x^y |t-c|^\alpha f(t)\, dt, \quad -1 \le x,y,c \le 1, \quad (1)$$

の与えられた $\{(x,y,c)\}$ の組に対する近似値の組 $\{Q_N(x,y,c)\}$を能率的に計算する。

本方法はクレンショー·カーチス則 [3] の一般化である。積分 (1) の $f(t)$ をチェビシェフ多項式 $T_k(t)$ の有限和

$$f(t) \sim p_N(t) = \sum_{k=0}^{N}{}'' a_k^N\, T_k(t), \quad (2)$$

で近似して、積分の近似値 $Q_N(x,y,c)$ は

$$Q(x,y,c) \sim Q_N(x,y,c) = \int_x^y |t-c|^\alpha p_N(t)\, dt, \quad (3)$$

となる。もし $f(t)$ が滑らかなら、$p_N(t)$ (2) は N の増大と共に速く収束する。3項漸化式を利用して、近似 (3) の積分の値を計算できる (2節参照)。

$f(z)$ の解析性を仮定すると、複素積分表示を利用して近似 (3) の打ち切り誤差が見積られる (4節参照)。この推定誤差を満足するまで、収束する近似値の列 $\{Q_N\}$ を反復的に作る。この際、従来は N を $N=2^n$ $(n=1,2,\cdots)$ として増大させた。ここでは、我々が既に示した [4] ように

$$N = 3\times 2^n, 4\times 2^n, 5\times 2^n, \quad (n=1,2,\cdots), \quad (4)$$

より緩やかに N を増大させ、誤差推定の機会を増すことにより、**無駄な標本数を減らし**、自動積分法の能率を高める。チェビシェフ展開係数 a_k^N (2) は**高速フーリエ変換 (FFT)** により能率的に計算される。数値例を用いて、滑らかな関数 $f(t)$ に対して本方法が有効であることを示す。

2 近似$Q_N(x,y,c)$の評価

定理: N 次多項式 $F_N(t)$ を

$$F_N(t) = \sum_{k=1}^{N} (b_{k-1} - b_{k+1})/(2k)\, T_k(t), \quad (5)$$

と表わして、$G(t;c)$ を

$$G_N(t;c) = |t-c|^\alpha (t-c)\{F_N(t) - F_N(c) + p_N(c)/(\alpha+1)\}, \quad (6)$$

とおく。すると近似値 $Q_N(x,y,c)$ は

$$Q_N(x,y,c) = G_N(y;c) - G_N(x;c), \quad (7)$$

によって求められ、b_k は多項式 $p_N(t)$ (2) の展開係数a_k^Nを用いて、初期値 $b_N = b_{N+1} = 0$ として3項漸化式

$$b_{k+1}\left(1 - \frac{\alpha+1}{k}\right) - 2c\, b_k + b_{k-1}\left(1 + \frac{\alpha+1}{k}\right) = 2\, a_k^N, \quad k = N, N-1 \cdots, 1, \quad (8)$$

を逆向きに安定に計算してえられる。但し、$k=N$ のとき右辺を 1/2 倍する。

証明: 式 (7) の両辺を微分して、次の微分方程式を得る。

$$(t-c)F_N'(t) + (\alpha+1)\{F_N(t) - F_N(c)\} = p_N(t) - p_N(c). \quad (9)$$

また (5) より $F_N'(t) = \sum_{k=0}^{N-1}{}' b_k T_k(t)$ である。さらに

$$2(t-c)F_N'(t) = \sum_{k=0}^{N} (b_{k+1} - 2c\, b_k + b_{k-1}) T_k(t), \quad (10)$$

(但し $b_{-1} = b_1$ とおく)であることに注目すると (9) より (8) が成立つことがわかる。

3 標本点

初期値 β_1=3/4 (と β_{-1}=0, β_0=1/2) として漸化式

$$\beta_{2j} = \beta_j/2, \quad \beta_{2j+1} = \beta_{2j} + 1/2, \quad j = 1,2,\cdots, \quad (11)$$

*Automatic Quadrature for Product Type Integral: Algebraic Singular Integrand

†Takemitsu Hasegawa, Fukui University

‡Tatsuo Torii, Nagoya University

表 1: 要求相対精度 $\varepsilon_r = 10^{-10}$ を達成するのに要する標本点数. 下端点と内点はそれぞれ、問題 A に対して -1 と 0.2 であり、問題 B,C に対して 0.0 と 0.6 である.

		問題 A			問題 B			問題 C		
	c	a=1	1/4	1/8	a=8.1	16.1	32.1	a=0.8	0.9	0.95
本方法	下端点	33	129	257	65	97	161	97	193	513
	内点	⇓	⇓	⇓	⇓	⇓	⇓	⇓	⇓	⇓
QUAD	下端点	40	170	230	490	980	1950	160	220	280
PACK	内点	798*	882*	966*	1512*	1764*	3360*	1218*	1050*	1470*

によって作られる $[0,1)$ 上の一様分布列 (で van der Corput 列の変形) $\{\beta_j\}$ に対して、$\{\cos 2\pi\beta_j\}$ は $[-1,1]$ 上でチェビシェフ分布する。$p_N(t)$ (2) を標本点 $\{\cos 2\pi\beta_j\}$ $(-1 \le j < N)$ で $f(t)$ を補間する N 次多項式とする。

以後 $N = 2^n$ $(n = 2,3,\cdots)$ と仮定すると、我々の補間多項式の列は$\{p_N(t), p_{5N/4}(t), p_{3N/2}(t)\}$ となる。$p_N(t)$ (2) のための $N+1$ 個の標本点$\{\cos 2\pi\beta_j\}$ はクレンショー·カーチス則で用いられた標本点$\{\cos \pi j/N\}$ $(0 \le j \le N)$ に一致する。$p_{5N/4}(t)$ と $p_{3N/2}(t)$のためのこの他の $N/4$ 個及び $N/2$ 個の標本点はそれぞれ $T_{N/4}(t) - \cos 2\pi\beta_4$、$T_{N/2}(t) - \cos 2\pi\beta_2$ の零点に一致する。そこで、これらの標本点上で $f(t)$ を補間するように、次式で表わされる$p_{N+N/\sigma}(t)$

$$
\begin{aligned}
p_{N+N/\sigma}(\cos\theta) &= p_N(\cos\theta) + 2\sin N\theta \sum_{k=1}^{N/\sigma} B_k^\sigma \sin k\theta, \\
&\qquad t = \cos\theta \quad \sigma = 2,4, \qquad (12)
\end{aligned}
$$

の係数 $\{B_k^\sigma\}$ を決める。このとき、この係数および$\{a_k^N\}$ (2) は FFT により能率的に計算される。

4 誤差評価

簡単のため $f(z)$ を M 個の単極 z_j $(1 \le j \le M)$ $(z_j \notin [-1,1])$ を持つ有理型関数と仮定し、r を $r = \min_{1\le j\le M} |z_j + \sqrt{z_j^2 - 1}|$ (> 1) とおく。補間多項式 $p_N(t)$、$p_{5N/4}(t)$、$p_{3N/2}(t)$ に基づく近似積分 $Q_N(x,y,c)$、$Q_{5N/4}(x,y,c)$、$Q_{3N/2}(x,y,c)$ の誤差はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
|Q(x,y,c) &- Q_N(x,y,c)| \\
&\lesssim \frac{4}{\alpha+1}\{|a_N^N|/2\} r/(r-1)^2, \\
|Q(x,y,c) &- Q_{N+N/\sigma}(x,y,c)| \\
&\lesssim \frac{8}{\alpha+1}(1 + |\cos 2\pi\beta_\sigma|)|B_{N/\sigma}^\sigma| r/(r-1)^2, \\
&\qquad \sigma = 2,4,
\end{aligned}
$$

によって一様に評価される。r は $\{a_k^N\}$ または $\{B_k^\sigma\}$ の漸近的振舞いから推定される。

5 数値例

次の 3 種類の**定積分**について、本方法と QUADPACK[5] との性能を比較した。不定積分のための自動積分ルーチンは他に見当たらない。

(A) $\int_{-1}^{1} |t-c|^\alpha / (t^2 + a^2)\, dt, \quad a = 1, 1/4, 1/8, \quad c = -1, 0.2,$

(B) $\int_0^1 |t-c|^\alpha \cos 2\pi a t\, dt, \quad a = 8.1, 16.1, 32.1, \quad c = 0, 0.6,$

(C) $\int_0^1 |t-c|^\alpha (1-a^2)/(1 - 2at + a^2)\, dt, \quad a = 0.8, 0.9, 0.95,\ c = 0, 0.6.$

表 1 に、$\alpha = -0.7$ として倍精度計算を行い、要求相対精度$\varepsilon_r = 10^{-10}$ を満足するのに必要な標本点数を示す。特異点 c が区間の端点および内点に対して、それぞれ QUADPACK 中のサブルーチン QAWS と QAGP を用いた。QAGP は代数的特異性に限定せず一般的なので、本方法との比較は不利になる。しかし、他に見当たらないので敢えて用いた。本方法では、共通の関数評価で異なる c の値の積分の近似値の組を求められる。

参考文献

[1] H. Takahasi and M. Mori, Double exponential formulas for numerical integration, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **9** (1974) 721-741.

[2] T. Hasegawa and T. Torii, Indefinite integration of function involving logarithmic singularity by the Chebyshev expansion, in *Numerical Mathematics Singapore 1988, R. P. Agarwal, Y. M. Chow and S. J. Wilson eds.*, ISNM **86** Barkhäuser–Verlag, Basel, 1988.

[3] C. W. Clenshaw and A. R. Curtis, A method for numerical integration on an automatic computer, *Numer. Math.* **2** (1960) 197-205.

[4] T. Hasegawa, T. Torii and H. Sugiura, An algorithm based on the FFT for a generalized Chebyshev interpolation, *Math. Comp.* **54** (1990) (to appear).

[5] R. Piessens, E. deDoncker–Kapenga, C. W. Überhuber and D. K. Kahaner, *QUADPACK, A subroutine Package for Automatic Integration*, Springer–Verlag, Berlin, 1983.