6Ｋ－２

多角形面積処理アルゴリズムの精度の分析

金澤賢人，宇田川佳久，西川正文

三菱電機株式会社　情報電子研究所

１．はじめに

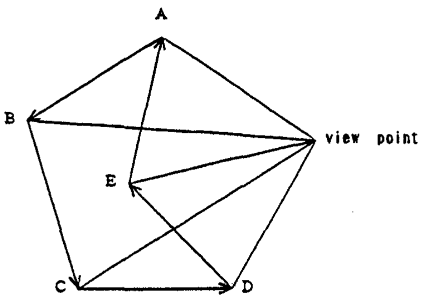
建築物は数百メートルのオーダの外観を持ちながら、部材の取り付けには数ミリメートルの精度が要求される。つまり、長さで６桁の数値精度が要求されている。実際には部材どうしの組み合わせが行われるので、さらに２桁つまりは全体で８桁の計算精度が建築ＣＡＤシステムに求められている。面積の計算では、さらに高い精度の計算が必要である。そこで、多角形の面積を求めるアルゴリズムを実現するにあたり、Ｃ言語の数値計算ライブラリの三角関数を用いるものと、外積の計算によるものの２通りの面積計算アルゴリズムについて精度の測定を行ったので報告する。

なお、測定はＶＡＸ１１／７５０を用いて行った。

２．面積計算のアルゴリズム

（１）アルゴリズムの説明

任意の多角形の内部の面積を求めるアルゴリズムは、多角形の頂点を一回りし、視点と多角形の隣り合う２頂点とでできる個々の三角形の面積の総和の絶対値である。これらの三角形の面積は、視点を中心に回転の基準方向を定め、一筆書きの一辺の方向が視点から見て基準方向なら正の面積とし、逆なら負の面積とする。この例を図－１に示す。



図－１　アルゴリズムの説明

この場合、次の計算によって多角形の面積は求められる。多角形を規定する頂点が、Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅの順に順序づけられ、かつ、視点に対して時計回りの方向の角度を正とする。図－１の多角形の頂点と視点が作る三角形は５個で、多角形の面積をＳ（ＡＢＣＤＥ）で表すと、

$$\begin{aligned} S(ABCDE) &= \left|\Sigma(\text{正/負符号})\times(\text{各三角形の面積})\right| \\ &= \left|-\Delta VAB-\Delta VBC-\Delta VCD-\Delta VDE-\Delta VEA\right| \end{aligned}$$

ここで個々の三角形の面積を求めるにあたり、２通りの方法を用いる。

１）ｍａｔｈライブラリの三角関数を用いて計算する。
２）外積計算を用いて計算する。

１）は、視点を挟む三角形の２辺をそれぞれａ，ｂとし、挟角をθとすると、三角形の面積Ｓ１は、

$$S1 = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin\theta$$

で計算される。

２）は、多角形の各頂点の座標を視点から見た位置ベクトルで表し、該当する２頂点に対するふたつの位置ベクトルの外積を計算し、その半分の値をとれば、上と同じ三角形の面積に対応する。それぞれの位置ベクトルを $\vec{u}$，$\vec{v}$とすると、

$$S1 = \frac{1}{2}\cdot \vec{u}\times\vec{v} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix}$$

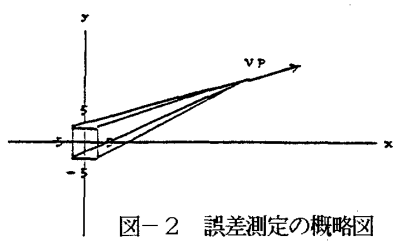
$$= \frac{1}{2}(u_1\cdot v_2 - u_2\cdot v_1)k$$

で計算される。[2]

（２）プログラムの構造

本プログラムは面積計算に関しては、三角関数用と外積用があり、一方、誤差の判定に関しては、10^{-6}、５％、１０％、３０％、５０％、連続１００ステップ面積＝０の誤差を検出する３種類用意し、計６本のプログラムを作った。

基本的にそれらのプログラムは、原点を中心におかれた１０×１０の正方形を原点回りの方向を決定し、その直線上に視点を設定し、可変ステップを用いて視点を原点より遠ざけていき、指定の条件を満たせば、そのときの結果を出力し、プログラムを終了するものである。



図－２　誤差測定の概略図

３．三角関数を用いた面積計算の評価

測定の方針として方向を０度～３６０度間で３０度おきに測定した。

（１）誤差マップ

三角関数を用いたプログラムの誤差マップをグラフ－１に示す。この誤差マップより以下のことが判明した。

ａ）　同じ誤差を出す図形と視点との距離は（対数的尺度上ではあるが）ほぼ同心円上にならんでいる。ただし、９０度、１８０度、２７０度の方向では急激に短くなっている。

ｂ）　誤差の出始め（10^{-6}の誤差が出る）は、通常約10^{9}の距離であり、９０度、１８０度、２７０度の方向では約10^{5}の距離である。

ｃ）　図形が点として潰れて見えるのは（連続１００ステップ面積＝０）、通常、約10^{17}の距離であり、９０度、１８０度、２７０度の方向では約10^{9}の距離である。

ｄ）　誤差は10^{9}～10^{17}の間の距離に存在し、距離のべき乗に比例して誤差も増大する。

ｅ）　９０度、１８０度、２７０度の方向の点は、それ以外の角度の点に比べてはなはだ悪く、その比は約10^{4}～10^{8}の範囲にある。

Accuracy Analysys of an Area Measurement Algorithm for a Simple Polygon
Masato KANAZAWA, Yoshihisa UDAGAWA, Masafumi NISHIKAWA
MITSUBISHI Electric Corp.

４．外積を用いた面積計算の評価

測定の方針として方向を０度～３６０度間で３０度おきに測定した。

（１）　誤差マップ

外積計算を用いたプログラムの誤差マップをグラフ－２に示す。

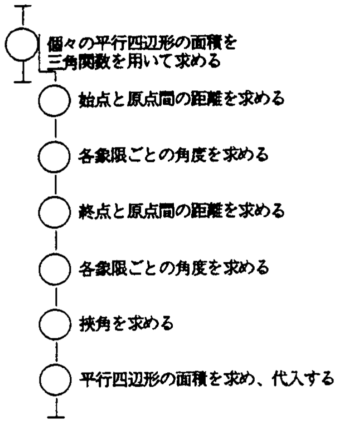
ａ）　同じ誤差を出す図形と視点との距離は（対数的尺度上ではあるが）ほぼ同心円上にならんでいる。ただし、０度、９０度、１８０度、２７０度の方向ではその距離が急激に長くなっている。

ｂ）　誤差の出始め（10^{-6}の誤差が出る）は、通常で約10^{5}の距離であるが、０度、９０度、１８０度、２７０度の方向の点で約10^{9}と10^{16}の距離である。

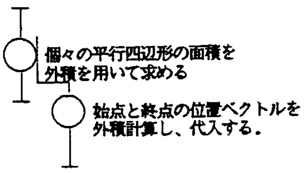
ｃ）　図形が点として潰れて見えるのは（連続１００ステップ面積＝０）、通常、約10^{17}の距離である。

ｄ）　誤差は10^{9}～10^{17}の間の距離に存在し、距離のべき乗に比例して誤差も増大する。

ｅ）　０度、９０度、１８０度、２７０度の方向の点は、それ以外の角度の点に比べてかなり良く、その比は約１～10^{11}の範囲にある。



図－３　ＨＣＰチャート１（using 三角関数）



図－４　ＨＣＰチャート２（using 外積計算）

５．結果の考察

本研究で最も意外で意味を感じたことは、この様な簡単なアルゴリズムに基づくプログラムに特殊な点という偏性があったことである。

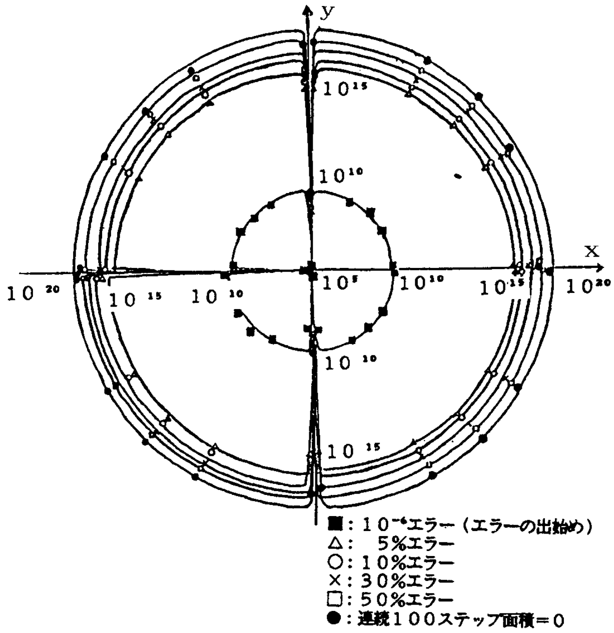
三角関数を用いた場合と外積計算を用いた場合の両者とも、その特殊な点とそれ以外の点では精度に大きな違いがある。

しかしながら、その違いも三角関数の場合と外積計算の場合では逆の結果となっている。つまり、三角関数の場合は、特殊な点での精度はその他の点に比べて悪くなっており、外積計算の場合はその逆の結果となっている。

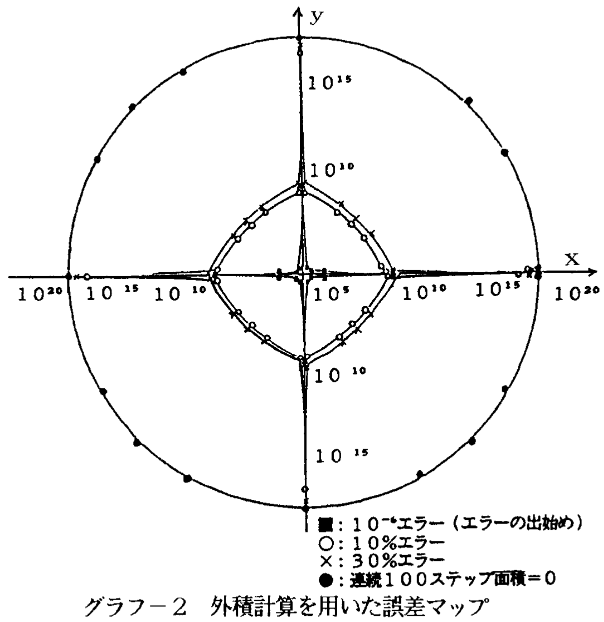
また外積計算を用いた例での特殊な点の位置は、０度、９０度、１８０度、２７０度と対称的な角度に位置しているが、三角関数を用いた例での特殊な点の位置は、９０度、１８０度、２７０度であり、さらにデータを細かく見れば、９０度と２７０度にはある程度の対称性が見られるが、１８０度の点の誤差はそれらと違った振る舞いをしている。（例えば、連続で１００ステップ面積＝０の場合のこの角度での値は、その他のエラー条件の場合では特殊な点なのに、それは特殊な点とはなっていない。）

ところで、角度が０度のとき、三角関数を用いた場合は特殊な点ではなく精度は良い値だし、外積計算を用いた場合は精度の良い値である特殊な点である。

このアルゴリズムで面積を求める際、このように対象となる図形から遠く離れた遠点に視点を置くことは常識的に考えられないが、対象となる図形から見て０度となる角度付近に視点を置けば、一番安全であろうと思われる。



グラフ－１　三角関数を用いた誤差マップ



グラフ－２　外積計算を用いた誤差マップ

参考文献

[1] Vincent Kassab:Technical C Programming,1989 by Prince-Hall,Inc

[2] C.R.Wylie:Advanced Engineering Mathematical, 1960,1966 by McGraw-Hall,Inc