

4面体格子法での面の向き付アルゴリズム

2K-4

土井章男 小出昭夫

日本アイ・ビー・エム株式会社 東京基礎研究所

1. はじめに

大規模なシミュレーション結果の視覚化において、等関数値曲面が使われることが多い。ここで、等関数値曲面とは、定義域を3次元とする関数 F と定数 C に対して、

$$F(x, y, z) - C = 0 \quad (1)$$

を満たす点 (x, y, z) の集合である。この等関数値曲面を多面体に近似する方法として、著者らは4面体格子法¹⁾を提案した。本論文では、その4面体格子法により生成された多面体データ(3角形)に対して、その面の向き(右回りを正とする)を関数の2次微分や各格子点の差分による計算を行わずに比較演算のみで求める方法を述べる。

2. 4面体格子法における面の向き付

4面体格子法は、格子点上で関数値が与えられたとき、まず、各格子を4面体に分割する。ここで格子点は (i, j, k) ($i=1, N_i, j=1, N_j, k=1, N_k$; N_i, N_j, N_k は、各 x, y, z 方向の格子数)で表されている。また直方体 (i, j, k) というとき、 $(i, j, k), (i+1, j, k), (i, j+1, k), (i, j, k+1), (i+1, j+1, k), (i+1, j, k+1), (i, j+1, k+1), (i+1, j+1, k+1)$ を頂点とする直方体をさす。表1は、各直方体を5個の4面体に分割する場合である。

空間を分割して得た直方体から生成される4面体に対して、式(2)に示す行列式の符号により各4面体に向きを定義する。

$$\begin{aligned} \text{行列式} = & \\ & \begin{vmatrix} P_{2,x} - P_{1,x} & P_{3,x} - P_{1,x} & P_{4,x} - P_{1,x} \\ P_{2,y} - P_{1,y} & P_{3,y} - P_{1,y} & P_{4,y} - P_{1,y} \\ P_{2,z} - P_{1,z} & P_{3,z} - P_{1,z} & P_{4,z} - P_{1,z} \end{vmatrix} \\ & \quad (2) \end{aligned}$$

ここで、4面体の頂点 P_1, P_2, P_3, P_4 の座標を $(P_{1,x}, P_{1,y}, P_{1,z}), (P_{2,x}, P_{2,y}, P_{2,z}), (P_{3,x}, P_{3,y}, P_{3,z}), (P_{4,x}, P_{4,y}, P_{4,z})$ とする。

このとき、各4面体の向きは、4面体頂点にあらか

じめ、順序(頂点1, 頂点2, 頂点3, 頂点4の順)を与えることでも定義できる。表-1は、順序をもった4面体頂点による4面体分割(5分割)であり、ここでは、4面体の向きは、 $(i'' - i') * (j'' - j') * (k'' - k')$ が正なら、生成される5個の4面体はすべて正の向き、負ならすべて負の向きとする。つまり、5分割の場合は、格子ごとに正負が入れ代わる。

次に図1に示すようなスタックテーブルを用意し、評価されている格子点を頂点とする4面体に対して、4面体頂点の符号 $F - C$ によって-, 0, +の欄へスタックしていく。

さらに、4面体から生成される多面体データ(3角形)の向き付けを表-2に示すようにあらかじめ、決定しておく。ここで、表-2の-, 0, +の欄の数は、-, 0, +のテーブルへスタックされた数である。等関数値曲面が存在するかは、4面体頂点の符号 $F - C$ によって表-2に示すような15通りの場合分けがあるが、実際は、ケース7~13のみを調べるだけでよい。また、 L_1, L_2, L_3, L_4 は、-, 0, +の符号の順に-, 0, +のテーブルからとりだされた4面体頂点の識別子である。 (L_i, L_j) は、 L_i と L_j 間にある多面体データ(3角形)の頂点を示す。 (L_i, L_i) は、多面体データ(3角形)の頂点が L_i であることを示す。

表-2の L_1, L_2, L_3, L_4 に直接、表-1で与えられた4面体頂点の順(頂点1, 頂点2, 頂点3, 頂点4の順)を代入すると4面体が負の向きをもつ場合、すべて生成される多面体データ(3角形)の辺は左回りを正、4面体が正の向きをもつ場合、すべて生成される多面体データ(3角形)の辺は右回りを正とするように並べられているのがわかる。

4面体から生成される多面体データ(3角形)の向き付けは、最初の4面体の向き(表-1で与えられた4面体頂点の順)と実際に計算された各4面体の頂点符号 $F - C$ からテーブルへスタックされた-, 0, +の符号順の4面体頂点を比べることにより決定するこ

Triangular Orientation Algorithm of Tetrahedral Grid Method

Akio Doi and Akio Koide

IBM Research, Tokyo Research Laboratory

とができる。

多面体近似の頂点は、格子点を頂点とする各4面体の辺上での線型補間により求めることができる。

3. 3角形の向き付けアルゴリズム

第2図に本手法のアルゴリズムを示す。4面体から生成される3角形の向き付けは、まず、4面体頂点の符号F-Cによって第1図に示した-, 0, +のテーブルへスタックしていく。-, 0, +のテーブルへスタックされた数により表-2から3角形が生成されるかどうか、決定される。

次に3角形が生成されるケース7からケース13に対して、-, 0, +の順にスタックされた4面体頂点を元の順序(表-2で定義された4面体頂点の順序)にもどすのに、何回、並び代えが行なわれるかを求める。4面体の向きが正の場合、この回数が偶数回なら、生成される3角形はあらかじめ定義された向き付けでよい。奇数回の場合は、表-2で与えられる3角形の第1頂点と第2頂点をいれかえる。4面体の向きが負の場合は、その逆であり、偶数回の場合に表-2で与えられる3角形の第1頂点と第2頂点をいれかえる。

4. 本手法の評価

本手法は、比較演算のみで向き付けを行なうので従来手法に比べて高速である。また、関数を2次微分する必要がないので、実験・測定データ等の場合、特に有効である。

参考文献

(1) 土井章男、小出昭夫、『等関数値曲面生成のための4面体格子法』、第3回Nicograph論文コンテスト論文集7、日本コンピュータグラフィクス協会、1987。

表-1 順序をもった4面体頂点による4面体分割

4面体	頂点1	頂点2	頂点3	頂点4
T1	(i',j',k')	(i'',j'',k')	(i''',j''',k''')	(i''',j'',k'')
T2	(i',j',k')	(i'',j'',k')	(i',j'',k'')	(i',j'',k'')
T3	(i',j',k')	(i',j'',k'')	(i',j'',k'')	(i',j'',k'')
T4	(i'',j'',k'')	(i'',j'',k'')	(i',j'',k'')	(i'',j'',k'')
T5	(i',j',k')	(i'',j'',k')	(i',j'',k'')	(i'',j'',k'')

ここで、整数i, j, kに対し、 $i''=2[(i+1)/2]$, $j''=2[(j+1)/2]$, $k''=2[(k+1)/2]$, $i'''=2i+1-i'$, $j'''=2j+1-j'$, $k'''=2k+1-k'$ であり、[]はガウスの記号で少数部分切り捨てを表す。4面体は格子点上の4頂点で与えられている。

表-2 4面体頂点の関数値の分類と生成3角形

ケース	-	0	+	生成される多角形
1	4	0	0	なし
2	0	0	4	なし
3	3	1	0	なし
4	0	1	3	なし
5	2	2	0	なし
6	0	2	2	なし
7	3	0	1	(L ₁ ,L ₄) (L ₂ ,L ₄) (L ₃ ,L ₄)
8	1	0	3	(L ₁ ,L ₂) (L ₁ ,L ₃) (L ₁ ,L ₄)
9	2	0	2	(L ₁ ,L ₄) (L ₂ ,L ₄) (L ₂ ,L ₃) (L ₂ ,L ₃) (L ₁ ,L ₃) (L ₁ ,L ₄)
10	2	1	1	(L ₁ ,L ₄) (L ₂ ,L ₄) (L ₃ ,L ₃)
11	1	1	2	(L ₁ ,L ₄) (L ₂ ,L ₂) (L ₁ ,L ₃)
12	1	2	1	(L ₁ ,L ₄) (L ₂ ,L ₂) (L ₃ ,L ₃)
13	1	3	0	(L ₂ ,L ₂) (L ₂ ,L ₃) (L ₄ ,L ₄)
14	0	3	1	なし
15	0	4	0	なし

符号	4面体の頂点
-	
0	
+	

図1 -, 0, +のスタックテーブル

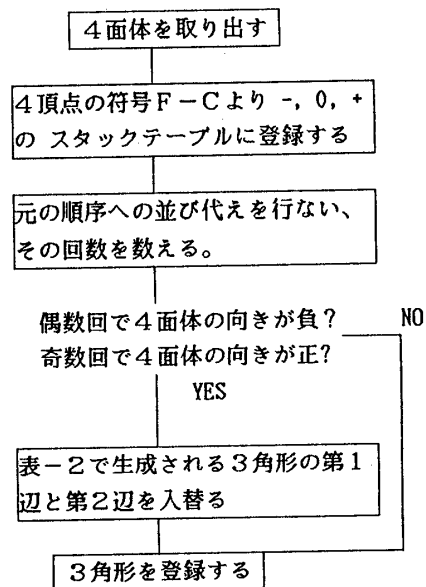


図2 向き付けアルゴリズム