積分方程式による非線形分岐現象の数値解析

7L-8

三宅修平*， 野中光彦**， 登坂宣好***
*関東学園大学， **日本大学大学院， ***日本大学

1．序

近年，境界積分方程式の数値解法である境界要素法が様々の分野の数理モデルの近似解法に適用され，注目されている。しかしながら，非線形問題への適用例は基本解を構成することができないことから，極めて少ないのが現状である。

著者らは，従来より非線形積分方程式の境界のみならず，領域内部をも離散化する解析手法を提案し，高い非線形性有する問題に適用し，手法の有効性を示してきた[1,2,3]。

非線形問題では，系のパラメータに依存する解の多価性のみならず解の分岐等が現れ，これらの現象を明かにすることが必要となる。そこで本論では，弾性アーチの非線形支配方程式を数理モデルとして選び，積分方程式法の非線形解析に対する有性を明かにする。

2．積分方程式表現

問題の積分方程式表現は以下で与えられる[1,2,4]。

$$w(\xi) = -\left[\frac{d^3 w}{dx^3} g^*\right]_0^\pi + \left[\frac{d^2 w}{dx^2}\frac{d g^*}{dx}\right]_0^\pi - \left[\frac{dw}{dx}\frac{d^2 g^*}{dx^2}\right]_0^\pi + \left[w\frac{d^3 g^*}{dx^3}\right]_0^\pi - \int_0^\pi q g^* dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left\{2\frac{d\beta^*}{dx} - \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right\} dx \cdot Q(g^*, w) \qquad (1)$$

但し，

$$Q(g^*, w) = \left[\frac{d\beta^*}{dx} g^*\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{d\beta^*}{dx}\frac{d^2 g^*}{dx^2} dx + \left[\frac{dw}{dx} g^*\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{dw}{dx}\frac{d^2 g^*}{dx^2} dx$$

w：無次元変位，β^*：初期形状，
q：無次元荷重，g^*：基本解

3．非線形解析

前章で与えた積分方程式を離散化することにより，以下の形式の連立非線形代数方程式を得る。

$$[N(w)]\{w\} - P\{F\} = \{0\} \qquad (2)$$

但し，

W：解ベクトル
P：パラメータ
F：パラメータモードベクトル
N：W と P を関係づけるマトリックス

この非線形方程式は極限点や分岐現象を有する非線形性の高い方程式である。 このため単純なNewton-Raphson法系の解法では，すべての解を追跡することはできない。一般には static perturbation法が有効なことが知られているが，この場合1次のみならず2次の増分釣合式が必要となり繁雑な計算が必要となる。

そこで本論では細野[5]により提案された孤長法を採用する。この手法は従来の孤長法に分岐解析の機能を付加したものであり，増分の釣合方程式は1次のみの定式化で分岐解析が可能な数値計算手法である。

(2)式をTaylor展開し増分の2次項以上を省略すれば，以下の増分釣合方程式を得る。

$$[K(w)]\{\Delta w\} - p\{F\} = \{0\} \qquad (3)$$

Numerical analysis for nonlinear bifurcation phenomena by an integral equation method
Shuhei MIYAKE*, Mitsuhiko NONAKA**, Nobuyoshi TOSAKA***
*Kanto Gakuen Univ., **Graduate School of Nihon Univ., ***Nihon Univ.

但し，

p ：パラメータの増分

Δw ：増分ベクトル

K ：Δw と p を関係づけるマトリックス

(3)式は極限点または，分岐点のときdet(K)=0となり，一意的に変位増分ベクトル Δwを決定することができない。そこで，文献[4]に従えば増分ベクトルは，以下のように与えられる。

$$\Delta w = D_1 \alpha + D_2 \beta \tag{4}$$

但し，αは同次モード，βは特解モード，D_1，D_2は任意の定数である。この変位増分ベクトルを分岐点における既知の解に加え，試行錯誤的に分岐パスに飛び移らせる。一度分岐パスに移れば，通常の孤長法[5,6]を適用することにより解を得ることができる。

4．解析結果例

手法の有効性を明かにするために集中荷重を受けるアーチの解析を行った。初期形状 β^* 及び境界条件は以下を採用した。

$$\beta^* = H^* \sin(x) \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} & w(0) = w(\pi) = 0 \\ & \frac{d^2 w}{dx^2}(0) = \frac{d^2 w}{dx^2}(\pi) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

また，積分方程式の分割数 n 及び，ライズパラメータ H^* は，以下の値を採用した。

$$\left.\begin{aligned} n &= 50 \\ H^* &= 12 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Fig.1に積分方程式による近似解をGalerkin法との比較を通して示す。さらに Fig.2にはアーチのモードを示す。Fig.1,2の中に示した印字 1 2 3 4 5 … はそれぞれ対応している。

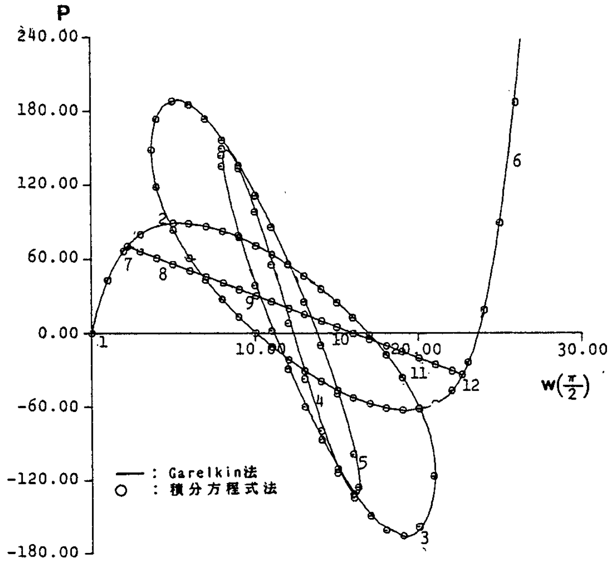

Fig.1 荷重－中央変位曲線

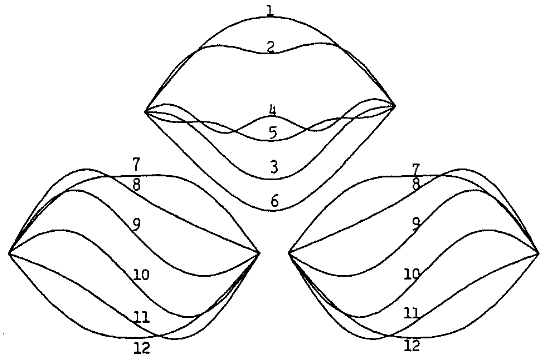

Fig.2 変形モード

参考文献

[1]三宅・登坂：積分方程式による偏平アーチの非線形解析，境界要素論文集，第４巻(1987.12)，pp.123-128.

[2]S. Miyake & N. Tosaka: Bifurcation Analysis for Thin Elastic Bodies by Using an Integral Equation Method, Boundary Element Methods in Applied Mechanics, 1988, Pergamon Press, pp.483-490.

[3]三宅・登坂：Hybrid型積分方程式によるElastica問題の解析，日本鋼構造協会第17回大会研究集会マトリックス解析法研究発表論文集，(1983.7)，pp.109-114.

[4]野中・三宅・登坂：Hybrid型積分方程式による偏平アーチの非線形分岐現象の解析，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集第13巻，(1989.7)(印刷中)

[5]細野：孤長法による弾性座屈問題の解析(その１)，日本建築学会論文報告集，第242号，pp.41-50，(その２)，第243号，pp.21-31.

[6]E.,Riks: An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems, Int. J. Solids Struct., 1979, Vol.15, pp.529-551.