5L-7

非線形システムの形式的線形化法と非線形オブザーバ

高田 等　（九州工大）
小松一男　森本義廣　（熊本電波高専）

1．序論　　現実のシステムはほとんどの場合非線形であり、なんらかの意味で線形化されて解かれることが多い。本稿は三角フーリエ展開を基にして逆変換が容易で、有効領域の広い状態空間上の形式的線形化法について考察した。

2．解法　　次の1次元非線形システムが与えられたとしよう。なお多次元への拡張は直接的である。

$$\Sigma_1 : \dot{x}(t)=Ax(t)+f(x(t)) \quad (\cdot=d/dt) \tag{1}$$
$$x(0)=x_0\in[0,2\ell]\subset R,\quad f\in C^1\cap L^2$$

ここで形式的線形化法の線形化関数 $\phi(x)$ を次のように定義する。

$$\phi(x)=[x,\sin\frac{\pi}{\ell}x,\cos\frac{\pi}{\ell}x,\cdot\cdot,\sin\frac{N\pi}{\ell}x,\cos\frac{N\pi}{\ell}x]^T \tag{2}$$
$$=[x,\phi_1(x),\phi_2(x),\cdot\cdot,\phi_{2N-1}(x),\phi_{2N}(x)]^T$$

このときの ϕ の次数をNと呼ぶ。逆変換 ϕ^{-1} は、

$$x=[1\ 0\ 0\ \cdots\ 0]\phi(x) \tag{3}$$

と容易に求まる。(1),(2)式より、

$$f(x)=g_0(x) \tag{4}$$
$$\dot{\phi}_{2r-1}(x)=\frac{d}{dt}\sin\frac{r\pi}{\ell}x=(\frac{d}{dx}\sin\frac{r\pi}{\ell}x)\dot{x} \tag{5}$$
$$=\frac{r\pi}{\ell}(\cos\frac{r\pi}{\ell}x)(Ax+f(x))=g_{2r-1}(x)$$
$$\dot{\phi}_{2r}(x)=\frac{d}{dt}\cos\frac{r\pi}{\ell}x=(\frac{d}{dx}\cos\frac{r\pi}{\ell}x)\dot{x} \tag{6}$$
$$=-\frac{r\pi}{\ell}(\sin\frac{r\pi}{\ell}x)(Ax+f(x))=g_{2r}(x)$$

$g_r\,(r=0,\cdot\cdot,2N)$ についてフーリエ展開すれば、

$$g_r(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{rk}\phi_k(x)+\alpha_{r0} \tag{7}$$

ただし、　$\alpha_{r0}=\frac{1}{2\ell}\int_0^{2\ell}g_r(x)dx$

$\alpha_{rk}=\frac{1}{\ell}\int_0^{2\ell}g_r(x)\phi_k(x)dx$

となる。r=2N次で打ち切れば、

$$\Sigma_2:\dot{\phi}(x)=B\phi(x)+C,\ \phi(x(0))=\phi(x_0) \tag{8}$$

ただし、 $B=\begin{pmatrix} A & \alpha_{01} & \cdot\cdot & \alpha_{02N} \\ 0 & \alpha_{11} & \cdot\cdot & \alpha_{12N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \alpha_{2N1} & \cdot\cdot & \alpha_{2N2N} \end{pmatrix}$　$C=\begin{pmatrix} \alpha_{00} \\ \alpha_{10} \\ \vdots \\ \alpha_{2N0} \end{pmatrix}$

となり、結局 ϕ に関する線形システム Σ_2 が具体的に得られた。よって(1)式の Σ_1 は(8)式の Σ_2 を介して(3)式より求まる。

次に誤差限界を調べるために(8)式を

$$\Sigma_2:\dot{\hat{\phi}}(x)=B\hat{\phi}(x)+C \tag{9}$$

と記述する。このとき(7)式より、

$$\dot{\phi}(x)=B\phi(x)+C+R_{N+1}(x) \tag{10}$$

ただし、 $R_{N+1}(x)=\sum_{k=2N+1}^{\infty}\alpha_k\phi_k(x)$

$\alpha_k=[\alpha_{0k}\ \alpha_{1k}\ \cdots\ \alpha_{2Nk}]^T$

(9),(10)式より、

$$\frac{d}{dt}(\phi(x)-\hat{\phi}(x))=B(\phi(x)-\hat{\phi}(x))+R_{N+1}(x) \tag{11}$$

初期条件 $\phi(x_0)=\hat{\phi}(x_0)$ を考慮し積分すると誤差限界は次式となる。

$$|x(t)-\hat{x}(t)|$$
$$\leqq\|[1\ 0\ \cdot\cdot\ 0]\|\int_0^t e^{\|B\|(t-\tau)}\|R_{N+1}(x)\|d\tau$$
$$=\frac{\|R_{N+1}\|}{\|B\|}(e^{\|B\|t}-1)\fallingdotseq\|R_{N+1}\|t\quad(t\fallingdotseq0) \tag{12}$$

3．オブザーバ　　力学系が(1)式のような非線形システムで与えられ観測方程式が

$$y(t)=Hx(t)+h(x(t))\quad h\in L^2 \tag{13}$$

で与えられているものとする。力学系(1)式は線形化により次の線形システム

$$\dot{\phi}(x)=B\phi(x)+C \tag{14}$$

に変換され、(13)式も同様にh(x)をフーリエ展開すれば次の線形システム

$$y(t)=D\phi(x)+e \tag{15}$$

が得られる。ただし、

$D=[H,\beta_1,\cdot\cdot,\beta_k,\cdot\cdot,\beta_{2N}]$

$e=\frac{1}{2\ell}\int_0^{2\ell}h(x)dx,\quad \beta_k=\frac{1}{\ell}\int_0^{2\ell}h(x)\phi_k(x)dx$

(14),(15)式より線形同一次元オブザーバは[2]

$$\dot{\hat{\hat{\phi}}}(t)=B\hat{\hat{\phi}}(t)+C+K(y(t)-D\hat{\hat{\phi}}(t)-e)$$
$$\hat{\hat{x}}(t)=[1\ 0\ \cdots\ 0]\hat{\hat{\phi}}(t)\quad(x(0)\in[0,2\ell])$$

となり、非線形のシステムに対するオブザーバが得られた。ただしKは(B-KD)のすべての固有値の実部を負にするように選ぶ。

4．数値実験と検討　　非線形システムの例として $\dot{x}(t)=2\sin(1.2x)$ $(x\in[0,2\ell])$ を考える。ϕ の次数N(N=1,··,5)をパラメータにし(9)式を解き、(3)式の逆関数によって得られた解を $\hat{x}(t)$、解析的に求めた値を $x(t)$ とする。Fig.1は x_0=0.3, ℓ=1.28のときのグラフである。Fig.1より線形化関数 ϕ の次数Nの増加と共に精度の向上が確かめられた。

<参考文献>

[1] 高田，小松，森本，石井："三角フーリエ展開を基にした非線形システムの形式的線形化法とその誤差限界"，電気学会全国大会、1989
[2] D.G.Luenberger:"An Introduction to Observers",IEEE Trans.AC-16,pp.596-602, 1971

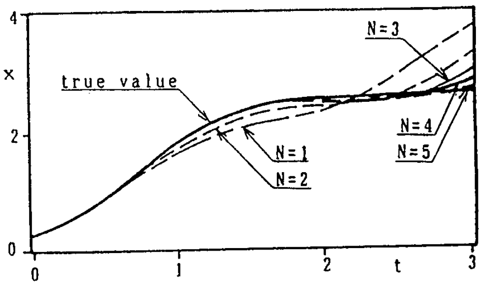

Fig.1

A Formal Linearization of Nonlinear Systems and Nonlinear Observer

Hitoshi TAKATA [1], Kazuo KOMATSU [2], Yosihiro MORIMOTO [2]
1 Kyushu Institute of Technology, 2 Kumamoto National College of Technology