3F-9

代数学的手法に基づく幾何学的推論システム(2)

東京大学工学部　°伊庭 斉志　井上 博允

1．はじめに

筆者らは、代数学的手法に基づいた幾何学的推論システムを構築中である。そのための基礎理論として、Wuの定理を採用し、その有効性を示す実験を行った。本稿では、より効率的な推論機能の実現について説明する。さらに、ロボティックス・CADなどの実際の応用に向けた推論の適用例、及び課題について述べる。

2．効率的な推論の実現

前稿で述べた推論には、計算上の問題があり、そのことによって実際レベルへの適用を妨げている。その障害とは、三角化の過程の$Rem(f_j, f_{k+1}, x_n)$の実行によりx_n以外の変数の次数が著しく増加し、扱う式の項数が膨大になることである。

このボトルネックを解消するために、次のような方針に基づいて、推論システムの効率化の実現を試みた。

①可約な式の分解

三角化の途中に可約な式が出て来たなら、分解した各々の因子ごとに三角化・Wuの手続きを実行する。

例．$f_1 = x\ (y+1)$

$f_2 = y^2 z + x$

$\rightarrow f_{11} := x,\ f_{12} := y+1$として、

$\{f_{11},\ f_2,\}$ 及び $\{f_{12},\ f_2,\}$ の２つの集合で三角化・推論を行う

この正当性は、f_1とf_2の構成する代数多様体$f_1 \cap f_2$は、$(f_{11} \cap f_2) \cup (f_{12} \cap f_2)$となることから得られる。従って、結論の式$g$が$f_1 \cap f_2$で成立するには、各々の分解$f_{11} \cap f_2$及び$f_{12} \cap f_2$で$g$が成立することが必要であり、各々で独立に計算できる。

②式の簡単化

例．$x^2 + y^4 + 3$などの式を除去

$a^2 + (b-c)^2 \rightarrow a=0,\ b=c$とする

これはもとの幾何学の命題が実数体上で表現されていることを前提したヒューリスティックスである。これにより虚点を本質的に伴う推論は不能になるので注意を要する。

③補助条件・退化条件との競合の判定

補助条件(Swain86)中の式と仮定の式が一致した場合、及び退化した式が与えられた場合は、その集合を枝刈りする。これはその集合が矛盾することによる。

以上の戦略の適用は決定的でないが、推論の厳密さをある程度保ちながら、実際レベルに適用できる効率化を実現する。これらのヒューリスティックスを用いた場合、難解な問題では①の集合分割がしばしば生じるので、本手法は特に有効である。

3．推論の実行例

前稿で述べた９点定理に対して、２節の戦略を実行すると、仮定の三角形式導出は次の３つに分割された。

仮定集合１

$hyp_1(a, f, d, j, b, i, h) = a - 2 \cdot h$

$hyp_2(a, f, d, j, b, i) = 2 \cdot e \cdot j + (2 \cdot d - 2 \cdot b) \cdot i - e^2 - d^2 + b^2$

$hyp_3(a, f, d, j, b) = c \cdot f - b \cdot g$

$hyp_4(a, f, d, j) = (2 \cdot d \cdot g^3 + (-2 \cdot e - 2 \cdot c) \cdot f \cdot g^2 + 2 \cdot c \cdot e \cdot f \cdot g) \cdot j - d \cdot g^4 + c \cdot f \cdot g^3 + ((e^2 + d^2) \cdot f - d \cdot f^2) \cdot g^2 + (c \cdot f^3 + (-c \cdot e^2 - c \cdot d^2) \cdot f) \cdot g - c^2 \cdot f^3 + c^2 \cdot d \cdot f^2$

$hyp_5(a, f, d) = -(c \cdot e - a \cdot d) \cdot g - c \cdot d \cdot f$

$hyp_6(a, f) = g^2 + f^2 - a \cdot f$

$hyp_7(a) = -a$

仮定集合２

$hyp_1(c, a, j, b, i, h) = a - 2 \cdot h$

$hyp_2(c, a, j, b, i) = 2 \cdot e \cdot j + (2 \cdot d - 2 \cdot b) \cdot i - e^2 - d^2 + b^2$

$hyp_3(c, a, j, b) = c \cdot f - b \cdot g$

$hyp_4(c, a, j) = (2 \cdot d \cdot g^3 + (-2 \cdot e - 2 \cdot c) \cdot f \cdot g^2 + 2 \cdot c \cdot e \cdot f \cdot g) \cdot j - d \cdot g^4 + c \cdot f \cdot g^3 + ((e^2 + d^2) \cdot f - d \cdot f^2) \cdot g^2 + (c \cdot f^3 + (-c \cdot e^2 - c \cdot d^2) \cdot f) \cdot g - c^2 \cdot f^3 + c^2 \cdot d \cdot f^2$

$hyp_5(c, a) = -(c \cdot e - a \cdot d) \cdot g - c \cdot d \cdot f$

$hyp_6(c) = c$

仮定集合３

$hyp_1(c, f, a, j, b, i, h) = a - 2 \cdot h$

$hyp_2(c, a, j, b, i) = 2 \cdot e \cdot j + (2 \cdot d - 2 \cdot b) \cdot i - e^2 - d^2 + b^2$

$hyp_3(c, f, a, j, b) = c \cdot f - b \cdot g$

$hyp_4(c, f, a, j) = (2 \cdot d \cdot g^3 + (-2 \cdot e - 2 \cdot c) \cdot f \cdot g^2 + 2 \cdot c \cdot e \cdot f \cdot g) \cdot j - d \cdot g^4 + c \cdot f \cdot g^3 + ((e^2 + d^2) \cdot f - d \cdot f^2) \cdot g^2 + (c \cdot f^3 + (-c \cdot e^2 - c \cdot d^2) \cdot f) \cdot g - c^2 \cdot f^3 + c^2 \cdot d \cdot f^2$

$hyp_5(c, f, a) = -(c \cdot e - a \cdot d) \cdot g - c \cdot d \cdot f$

$hyp_6(c, f) = e \cdot g + d \cdot f$

$hyp_7(c) = c$

A Geometric Reasoning System Based on the Algebraic Variety Approach (2)

Hitoshi IBA　Hirochika INOUE
Faculty of Engineering, University of Tokyo

これらの各仮定集合において結論は成立し、最終的な剰余項は０となった。新しい仮定集合は、前稿のものより次数・項数が少なく、その結果三角化導入・Wuの手続きにおける効率化を実現する。

いくつかの問題において、効率化の有効性を示す実験を行った。表１は実行結果の比較を示す。但し、表１は最終的な仮定集合中の式における比較であり、実際には三角化の途中において、より次数・項数の大きな式が現れる。次数が１つ増えることによるMACSYMAにおける計算量の増加は、無視できないことに注意されたい。表が示すように、分割の回数に比例して項数と次数の増加を効果的に抑えられることを確認した。

なお、前節の手法の正当性は、Wuの手続きの完全性の議論(Chou84)に基づく。そのための可約多様体の分割と基礎体に関する性質を、我々は効率化の手法として導入した。

４．推論システムへの課題

本節では、代数学的手法に基づいて実現した幾何学的推論システムを、ロボティックスやＣＡＤなどへ応用するための課題と、現在の研究について説明する。

（１）述語論理を統合した推論系の構築

代数学的手法は、幾何学的概念の扱いにおける述語論理の不完全さを補うが、それのみでは実際の推論に有用ではない。例えば、今までに解いた問題などを蓄積して新たな推論に用いることは、不可能である。これらの推論に対しては、明らかに従来の形式論理を用いる方が優れている。従って応用面において、代数学的手法と述語論理を統合した推論系の構築が不可欠であると考える。

（２）推論の完全性

Wuの定理は命題成立の必要十分条件を保証しているが、推論システムとしては重大な問題がある。それは独立変数の選定問題である。独立変数が真に独立でない場合、証明は成功しない。例えば、９点定理の例では、

$hyp_1(b,f,g,d,j,i,h)=a-2\cdot h$

を第一式とする三角形式では、証明が成功せず剰余項は非零であった。独立変数の選定は、幾何学の問題の記述から容易に得られるという研究もあるが(Chou84)、ロボティックスやＣＡＤへの応用の場面では困難であろうと思われる。

問題数	効率化なし		効率化あり		
	次数	項数	分割数	次数	項数
[Wu78] Ex.2	8	16	1	5	10
Kanadeの例 [伊庭88]	2	9	1	3	4
[Sawin86] p.285	7	10	2	5	10
[Nevins75] Ex.1	6	49	2	3	17
9点定理	7	14	4	5	14
bisector problem	終了せず		24	10	35

表1. 実行結果のデータ

現在我々は、（１）の述語論理レベルでの記述との関係から独立変数を自動的に選定し、さらに非零の剰余項の解析により推論を強化する研究を行っている。

本稿では、幾何学の定理の証明を例にとって推論システムの概要を説明したが、本手法の考え方に基づく幾何学的概念の学習、ロボティックスへの応用もいくつかなされている(Hong86)(Cyrluk87)。さらに、(伊庭88)は、実例からの画像理解のヒューリスティックスの学習を試み、Kanadeの歪んだ対称に相当する幾何学的制約を獲得する実験を行った。これにより、従来の意味での「推論」への代数学的表現の有効性を確認した。

５．おわりに

本稿では、代数幾何学的表現に基づく幾何学的推論システムについて、効率化のための手法と実際の推論システム実現に向けての課題について述べた。さらに実験例をもとに、代数学的手法が従来の述語論理による幾何学的推論システムの不完全さを補い、幾何学的概念の適切な扱いを可能にすることを示した。

本手法のロボティックスやＣＡＤへの本格的な応用を現在研究中である。その際に不可欠な、述語論理を統合した推論系の構築と数学的解釈が、今後の課題である。

参考文献

(伊庭88) 伊庭斉志、井上博允：”画像理解におけるヒューリスティックの代数幾何学的表現とその学習”，日本ロボット学会第六回学術講演会予稿集 1988

(Buchberger85) Buchberger,B.:"Gröbner bases: an algorithmic method in polynomial ideal theory", in 'Multidimensional systems theory',(ed.N.K.Bose) D.Reidel,Dordrecht,1985

(Chou84) Chou,S.:"Proving elementary geometry theorems using Wu's algorithm", Contemporary Mathematics,29,AMS,1984

(Chou86) Chou,S.:"Proving geometry theorems with rewrite rules", J. automated reasoning,2,1986

(Cyrluk87) Cyrluk,D. et. al.:"The formation of partial 3D models from 2D projections —an application of algebraic reasoning", Proc. Image Understanding workshop,DARPA,1987

(Hong86) Hong,J.:"Proving by example and gap theorems",Pro. 27th IEEE Symp. FOCS,1986

(Nevins75) Nevins,A.J.:"Plane geometry theorem proving using forward chaining", Artificial Intelligent,6,1975

(Swain86) Swain,M.J. and Mundy,J.L.: "Experiments in using a theorem prover to prove and develop geometrical theorems in computer vision",Proc. of IEEE,Robotics & Automation,1986

(Wu78) Wu,W.:"On the decision problem and the mechanization of theorem-proving in elementary geometry",中国科学,21,1978