

ライフゲームにおける $1/f$ ゆらぎと過渡状態

蜷 川 繁[†]

ライフゲームにおいてランダム初期様相から時間発展した場合に $1/f$ ゆらぎが観測されることが知られている。本研究では、この $1/f$ ゆらぎと過渡状態との関係を明らかにするために $1/f$ ゆらぎの持続ステップ数と過渡ステップ数を測定した。パワースペクトルが $1/f$ ゆらぎであることを判定するために、低周波域での $1/f$ ゆらぎからのずれを測定した。過渡状態の判定としては、周期 6 の周期的な様相になった時点で過渡状態の終了とした。これらの判定条件を用いて得られた $1/f$ ゆらぎの持続ステップ数と過渡ステップ数の間には比例関係が見られた。

1/f Fluctuation and Transient Behavior in the Game of Life

SHIGERU NINAGAWA[†]

$1/f$ fluctuation is observed in the evolution of the Game of Life from random initial configurations. We measured the duration of $1/f$ fluctuation and the transient time steps to elucidate the relationship between $1/f$ fluctuation and the transient behavior in the Game of Life. We measure the error of the power from $1/f$ fluctuation at low frequencies to decide whether a power spectrum is $1/f$ fluctuation or not. The end of transient behavior can be detected by the condition that the evolution reaches the configurations with period six. We ascertained that the duration of $1/f$ fluctuation is in proportion to the transient time steps.

1. はじめに

ライフゲームは 2 次元 2 状態 9 近傍セルオートマトンの一種であり、セル平面上に様々なパターンが生成されることが知られている。特にグライダーと呼ばれる伝播するパターンをデジタル信号と見なすことによって、ライフゲーム上で万能計算機が構成できる¹⁾ことが知られている。そのほか、ライフゲームは自己組織化臨界性 (self-organized criticality²⁾) や $1/f$ ゆらぎ³⁾ という性質を備えている。

$1/f$ ゆらぎはパワースペクトルが周波数に反比例することからその名がつけられ、真空管電流や、クラシック音楽の音圧変動、高速道路の車の流れなど、様々な現象において観測されているが、いまだにその発生のメカニズムは明らかにされていない。

$1/f$ ゆらぎは主に非平衡状態のシステムにおいて観測されており、ライフゲームにおいても、 $1/f$ ゆらぎはランダムな初期様相から時間発展した過渡状態において観測される。このことから、ライフゲームにおい

てランダムな様相からの過渡状態と $1/f$ ゆらぎには相関関係があることが予想される。そこで、本研究ではライフゲームを時間発展させた場合の過渡ステップ数と $1/f$ ゆらぎの持続ステップ数を求め、それらの関係を調べる。

2. ライフゲームにおける $1/f$ ゆらぎ

ライフゲームは 2 次元 2 状態 9 近傍外総和型セルオートマトンの一種である。各セルは 0 または 1 のいずれかの状態をとり、座標 (x, y) に位置するセルのステップ t での状態を $s_{x,y}(t)$ とし、周囲の 8 個のセルのうちステップ t での状態が 1 のセルの数を $n_{x,y}(t)$ とするとセルの状態遷移は

$$s_{x,y}(t+1) = f(s_{x,y}(t), n_{x,y}(t)), \quad (1)$$

と表される。ここで f は次式で定義される遷移関数である。

$$\begin{aligned} f(0, 3) &= 1, \\ f(1, 2) &= 1, \quad f(1, 3) = 1, \\ \text{otherwise} & \quad f = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

0, 1 の状態が等確率で出現するようにランダムに生成した初期様相から T ステップにわたって状態遷移を行い、得られたセルの時系列データ $s_{x,y}(t)$, ($t =$

[†] 金沢工業大学
Kanazawa Institute of Technology

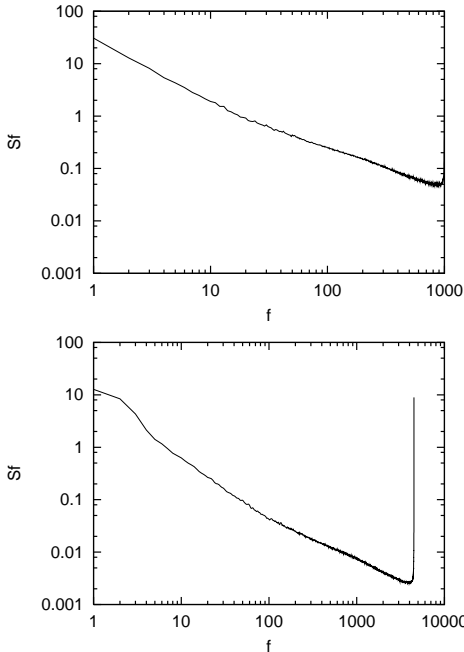


図 1 ランダム初期様相から時間発展した場合のライフゲームのパワースペクトル. 上: $T = 2,000$, 下: $T = 9,000$
 Fig. 1 Power spectra of the evolutions from a random initial configuration in the Game of Life. Top: $T = 2,000$, bottom: $T = 9,000$.

0, 1, ..., T-1) から次式に示すパワースペクトル S_f を求める.

$$\hat{s}_{x,y}(f) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} s_{x,y}(t) \exp(-i \frac{2\pi t f}{T})$$

$$(f = 0, 1, \dots, T-1).$$

$$S_f = \sum_{x,y} |\hat{s}_{x,y}(f)|^2. \quad (3)$$

本論文で考えるセル空間は縦 × 横 = 100 × 100 個のセルからなり, 境界条件として周期境界条件 (periodic boundary condition) を用いる. $T = 2,000$ と $T = 9,000$ の場合のパワースペクトルを図 1 に示す. $T = 2,000$ の場合は $1/f$ 型のパワースペクトルを示すのに対し, $T = 9,000$ の場合は低周波域において $1/f$ 型のパワースペクトルからずれていることが分かる.

3. $1/f$ ゆらぎの判定条件

ライフゲームの時間発展において, $1/f$ ゆらぎの持続時間を測定するためには, パワースペクトルが $1/f$ であるかどうかを判定するための条件が必要となる. 前節の結果から分かるように, ライフゲームでは一般にステップ数を長くするにつれ, パワースペクトルは $1/f$ ゆらぎからずれてくるが, それは低周波域での傾き

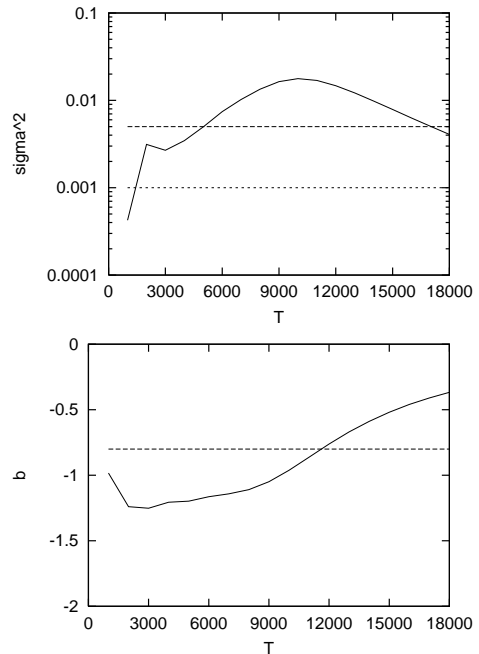


図 2 ステップ数 T を変化させた場合の, パワースペクトルを最小自乗法によって $S(f) = af^b$ で近似した際の残差 2 乗和 σ^2 (上) およびべき指数 b (下). 点線は $1/f$ ゆらぎの判定条件に用いた値を表す
 Fig. 2 Plot of σ^2 (top) and b (bottom) as a function of time step T where a power spectrum is fitted by a least-square fitting $S(f) = af^b$ and σ^2 is the residual sum of squares. The dotted lines represent the values that are employed in the condition for judgment about whether a power spectrum is $1/f$ fluctuation.

の絶対値が小さくなるという形で発生する. したがって, $1/f$ ゆらぎの判定は, 低周波域でのパワースペクトルの振舞いを調べればよいことが推測できる.

そこで, パワースペクトルの低周波領域である $f = 1 \sim 10$ の領域を $S(f) = af^b$ で近似し, 最小自乗法によって傾き b と残差 2 乗和 $\sigma^2 = \sum_{f=1}^N (S_f - S(f))^2 / N$ を求める ($N = 10$). 次に, T を 1,000 から 18,000 まで 1,000 ずつ変えて b および σ^2 を求めた. その典型的な例を図 2 に示す. これを見ると, σ^2 は約 $T = 10,000$ で最大値をとった後, 減少している. これは, 低周波部分での傾き b の絶対値が徐々に小さくなるにつれて, より直線に適合しやすくなるためだと思われる.

パワースペクトルが $1/f$ ゆらぎか否かを判定する際に, 主観的な要素が入ってくることは避けられないと思われる. そこで, $1/f$ の判定条件としては, 固定した条件を設定するよりも, 何らかのパラメータを導入して, それを場合に依じて変化させることによって判定するのが現実的であろう. ここで, $1/f$ ゆらぎの判

定条件として $b < -0.8$ かつ $\sigma^2 < \sigma_c^2$ という条件を課すことにする．最初の条件はパワースペクトルが $1/f$ に近い傾きを持つことを保証し，2 番目の条件は最小自乗法の誤差が小さく，パワースペクトルを $1/f$ で近似することの正当性を保証している．このように判定条件を設定することにより，図 2(上)に示すように， T が大きくなるにつれて σ^2 が極大値を経て，しだいに減少しても b は -0.8 以上になっているので $1/f$ ゆらぎと判定されることはない．

一般に， σ_c^2 を小さくすると， $1/f$ ゆらぎの判定がより厳しくなり，大きくすると判定が緩やかになることから， σ_c^2 は $1/f$ ゆらぎの判定の厳密性を変えるためのパラメータと考えることができる．たとえば図 1(下)に示した $T = 9,000$ のパワースペクトルは $\sigma^2 = 0.00503$ であることから， $\sigma_c^2 = 0.006$ とした場合は判定条件を満たすが $\sigma_c^2 = 0.005$ の場合は判定条件を満たさない．

4. 実験結果

一般にセル数が有限で周期境界条件のような決定論的な境界条件下のセルオートマトンでは，時間発展は周期的になることが知られている．特にライフゲームにおいて，ランダム初期様相から出発した場合，ほとんどの場合は周期が 2 および 3 のパターンのみが残り，全体として周期 6 の周期的な様相になることが知られている．そこでライフゲームの過渡ステップ数を測定するには周期 6 の様相になることを調べればよい．

このようにして，ライフゲームの同一の時間発展に対し過渡ステップ数と $1/f$ ゆらぎの持続ステップ数を求めた．30 通りの初期様相について， T を 100 ずつ変化させて b と σ^2 を求め，判定条件が成立するステップの最大値 T_f を求めた． σ_c^2 としては比較のため，0.005 および 0.001 の 2 通りの値を用いた．一方，同じ 30 個の初期様相について過渡ステップ T_r 数を求めた．このようにして求めた T_f と T_r の相関を図 3 に示す．

T_r と T_f の相関係数は σ_c^2 が 0.005 および 0.001 の場合，それぞれ 0.974, 0.748 となり，両者の間には相関があるといえる．また最小自乗法で $T_f = c + d * T_r$ と近似したところ σ_c^2 が 0.005 の場合， $c = 981.65$ ， $d = 3.5895$ となり， σ_c^2 が 0.001 の場合， $c = 777.92$ ， $d = 1.3272$ となった． σ_c^2 が小さいと， $1/f$ ゆらぎの判定が厳しくなりことから， $1/f$ ゆらぎの持続時間が短くなっていることが分かる．

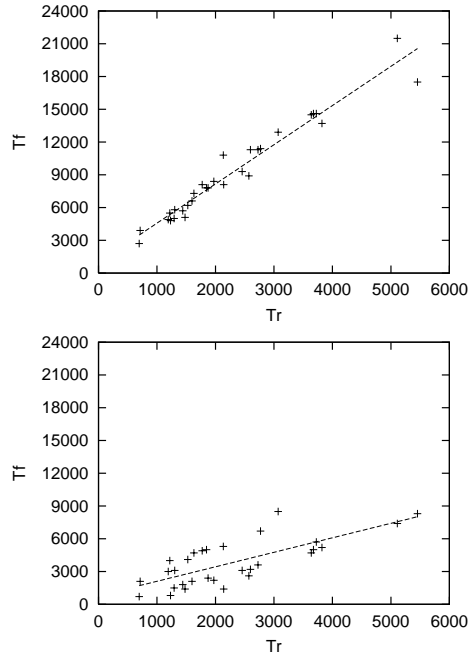


図 3 $1/f$ ゆらぎの持続ステップ数 T_f と過渡ステップ数 T_r の相関および最小自乗法による直線 $T_f = c + d * T_r$ へのあてはめ．上: $\sigma_c^2 = 0.005$ の場合，相関係数は 0.974, $c = 981.65$ ， $d = 3.5895$ ，下: $\sigma_c^2 = 0.001$ の場合，相関係数は 0.748, $c = 777.92$ ， $d = 1.3272$

Fig. 3 Correlation between the duration time steps of $1/f$ fluctuation T_f and the transient time steps T_r . The dotted lines represent the least-square fitting of the data by the function $T_f = c + d * T_r$. Top: correlation coefficient is 0.9974, $c = 981.65$, $d = 3.5895$ where σ_c^2 is set to 0.005. Bottom: correlation coefficient is 0.748, $c = 777.92$, $d = 1.3272$ where σ_c^2 is set to 0.001.

5. おわりに

本研究で用いた判定条件によって， $1/f$ ゆらぎのステップ数と過渡ステップ数の間に比例関係があることが確認できた．このことは，本研究で提案した判定条件の妥当性を裏付けているといえる．

ライフゲームの安定様相から出発した場合に，自己組織化臨界性という性質が成り立つことが知られているが，その後，自己組織化臨界性はセル数が比較的小さい場合（1 辺のセル数が数百程度）にのみ成り立つことが指摘されている⁴⁾．

それに対して，ランダム様相から出発した過渡状態においては，1 辺のセル数が 100 から数千のスケールにわたって，過渡ステップ数が 1 辺のセル数の対数に比例して増大することが報告されている⁵⁾．本研究で得られた $1/f$ ゆらぎのステップ数と過渡ステップ数が比例するという知見がセル数に依存せずに成り立つな

らば, $1/f$ ゆらぎの持続ステップ数もセル数の対数に比例して増大することが予想される.

本研究で提案した判定条件を用いることによって, セルオートマトンにおいてセルの時系列変化の $1/f$ ゆらぎへの近さを定量的に測定することができる. 今後, この $1/f$ ゆらぎへの近さを, 遺伝的アルゴリズムの適合度として用いることにより, $1/f$ ゆらぎを示すセルオートマトンを進化計算を用いて探索する予定である.

参 考 文 献

- 1) Berlekamp, E.R., Conway, J.H. and Guy, R.K.: *Winning ways for your mathematical plays*, Vol.2, Academic Press, New York (1982).
- 2) Bak, P., Chen, K. and Creutz, M.: Self-organized Criticality in the 'Game of Life', *Nature*, Vol.342, pp.780-782 (1989).
- 3) Ninagawa, S., Yoneda, M. and Hirose, S.: $1/f$ fluctuation in the "Game of Life," *Physica D*, Vol.118, pp.49-52 (1998).

- 4) Hemmingsson, J.: Consistent Results on 'Life', *Physica D*, Vol.80, pp.151-153 (1995).
- 5) 蜷川 繁, 米田政明, 広瀬貞樹: ライフゲームにおける過渡現象のセル数依存性, 人工知能学会論文誌, Vol.16, No.2, pp.164-166 (2001).

(平成 13 年 10 月 16 日受付)

(平成 14 年 3 月 14 日採録)



蜷川 繁 (正会員)

1986 年金沢大学理学部物理学科卒業. 1988 年富山大学大学院理学研究科修士課程修了. 民間企業を経て, 1998 年富山大学大学院工学研究科博士後期課程修了. 博士 (工学). 同年, 明星大学情報学部助手. 1999 年金沢工業大学情報工学科講師. 2002 年同助教授. 複雑系, 人工生命に関する研究に従事. 電子情報通信学会, 人工知能学会, 計測自動制御学会各会員.