静電場的解釈による実係数代数方程式の反復解法

7B-2

桜井鉄也　鳥居達生　杉浦洋
(名古屋大学工学部)

1.まえがき

代数方程式 $f(x)=0$ の根を求める反復解法の多くは $f(x)$ に対する有理近似，あるいは $f'(x)/f(x)$ に対する有理近似から導かれる[1]-[4]. これらの方法の中では $f'(x)/f(x)$ を用いたほうが一般には反復回数は少ない. 一方，係数の実数性を考慮した方法に Bairstaw 法があるが，単純な Newton 法と同様に実用性は乏しい. これは多項式から2次因子を見つける方法であるが，残差に対する連立の Newton 法として構成され，そのままでは1次因子を見つける方法との直接の関連は見られない.

我々は $f'(x)/f(x)$ に対する有理近似を拡張し，1次因子を見つける方法と同様の算法により2次因子を見つける方法が構成できることを示し，係数の実数性を考慮した反復法を提案する.

2.電荷モデルと連分数展開

まず1次因子を見つける方法について簡単に述べる.

$$e(x)=f'(x)/f(x)$$

と置く.この $e(x)$ を有理式で近似し，近似式の分母の零点を次の近似根とする. 近似する有理式の分子と分母の次数を適当に決めることにより任意の収束次数の反復法が得られる.計算を簡単にするため分母は1次に固定し，分子の次数を上げることで収束の次数を高くすることが多いが，我々は分子が分母より1次低い有理式が $e(x)$ に対しては大域的な適合性が高いことを示した[5]. この近似式を静電場との対応から電荷モデルと呼ぶ. これは $f'(x)/f(x)$ を Viscovatovの算法を用いて連分数展開することにより求められる.

3.連分数展開の拡張

3.1 有理式に対するMOD演算

1次因子を求める方法と同様の形式で2次因子を求める方法を表現するために有理式に対するMOD演算を用いる.

定義

$$f(x)=Q(x)W^k(x)+g(x)$$
$$\Leftrightarrow f(x)\equiv g(x),\ \mathrm{mod}\ W^k(x)$$

ここで $W(x)$ は $w_1, w_2, \ldots, w_p$ を零点に持つ p 次の多項式とし, $f(x), Q(x), g(x)$ は有理式で $Q(x)$ の分母と $W(x)$ は互いに素とする.

以下では特に必要の無いかぎり $W(x)$ を単に W と書くことにする.MOD演算には次のような性質が成り立つ.

定理1.

もし

$$f_1(x)\equiv g_1(x),\ \mathrm{mod}\ W^{k_1},$$
$$f_2(x)\equiv g_2(x),\ \mathrm{mod}\ W^{k_2},$$
$$k=\min(k_1,k_2)$$

ならば

1) $f_1(x)\pm f_2(x)\equiv g_1(x)\pm g_2(x),\ \mathrm{mod}\ W^k$

2) $f_1(x)\bullet f_2(x)\equiv g_1(x)\bullet g_2(x),\ \mathrm{mod}\ W^k$

3) $f_1(x)/f_2(x)\equiv g_1(x)/g_2(x),\ \mathrm{mod}\ W^k$

4) $f_1(x)^{(j)}\equiv g_1(x)^{(j)},\ \mathrm{mod}\ W^{k_1-j},\ 0\le j\le k_1$

定理2.

もし

$$f(x)\equiv g(x),\ \mathrm{mod}\ W^k$$

ならば

$$f(x_i)^{(j)}=g(x_i)^{(j)},\ 1\le i\le p,\ 0\le j\le k.$$

このことより $g(x)$ は $f(x)$ に対して $W(x)$ の零点を補間点とする有理Hermite補間となっていることがわかる.

An Electrostatic Interpretation Iterative Method for Finding Roots of Polynomial with Real Coefficients

Tetsuya SAKURAI, Tatsuo TORII, Hiroshi SUGIURA
Nagoya Univ.

3.2 MOD演算による連分数展開

MOD演算を用いることにより有理式を連分数に展開する算法であるViscovatovの算法を拡張できる.
そのｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑを以下に示す.

まず多項式$f(x)$に対して

$$f(x) \equiv g(x),\ \mathrm{mod}\ W^{k+1}$$

であるような多項式$g(x)$を求める.
そうすると定理1.より

$$e(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \equiv \frac{g'(x)}{g(x)},\ \mathrm{mod}\ W^{k}$$

である.

次にViscovatovの算法とMOD演算を組み合わせて以下のように計算する.

$$h_0 = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h_i} = C_i + W\hat{h}_{i+1} \\ \hat{h}_{i+1} \equiv h_{i+1},\ \mathrm{mod}\ W^{k-i},\ i = 0, 1, \ldots k-1 \end{cases}$$

これより$e(x)$に対する mod W^k の連分数展開

$$e(x) \equiv \cfrac{1}{C_0 + \cfrac{W}{C_1 + \cfrac{W}{C_2 + \ddots + C_{k-1}}}},\ \mathrm{mod}\ W^{k}$$

が得られる.

4.実係数代数方程式に対する電荷モデル

実係数代数方程式の複素共役な根を求めるために補間点を決定する$W(x)$を複素共役な根を持つ2次式

$$W(x) = (x - x_0)(x - \bar{x}_0)$$

とする. この$W(x)$によって$e(x)$を連分数展開することにより$e(x)$に対する有理近似式が得られ, その分母の零点のうち修正量が一番小さくなるものを次の近似根とする.

近似する有理式の分母が複素共役な根を持つときには, 共役な位置に置いた2つの電荷を組にした電荷モデルと考えられる.

新しい近似根が実根のときには実軸上での電荷モデルを用い, 実根に対しては実軸上で接近するようにする. これにより得られた近似根が実根か共役複素根かの判定をする必要はなく, また実根の数があらかじめわからなくてもすべての根を求められる.

共役近似根と実近似根の収束の振る舞いを下図に示す. 一回反復あたりの計算量と方法の収束性の面から実用的には近似する有理式は分子が3次で分母が4次の有理式が適当である.

参考文献

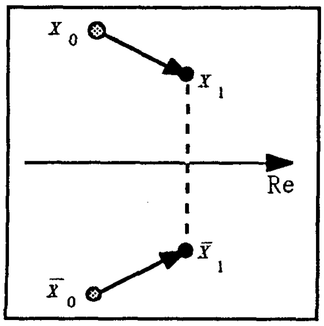
[1] Nourein, A. M. : Root Determination by Use of Padé Approximants, *BIT*, Vol. 16, pp. 291-297(1976)

[2] Garside, G. R., Jarrat, P. and Mack, C. : A New Method for Solving Polynomial Equations, *Comp. J.* ,Vol. 11, pp. 87-89 (1968)

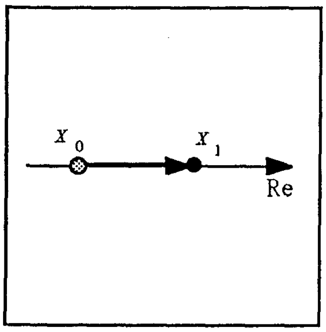
[3] Pomentale, T. : A Class of Iterative Method for Holomorphic Functions, *Nurmer. Math.*, Vol 18, pp. 193-203 (1971)

[4] 桜井鉄也, 杉浦洋, 鳥居達生 : 静電場的解釈に基づく代数方程式の解法とその応用, 数理解析研究所講究録 648, pp. 151-168 (1988)

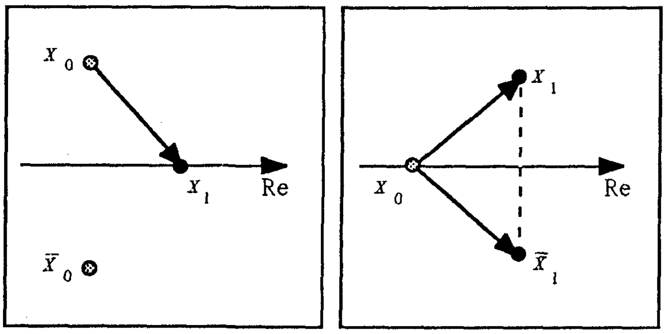
[5] 桜井鉄也, 鳥居達生, 杉浦洋 : 静電場的解釈に基づく代数方程式の反復解法, 情報処理学会論文誌, Vol. 29, No. 5, pp. 447-455 (1988)



共役近似根



実近似根



共役近似根と実近似根の切り替え