# Byrne型のPseudo−Runge−Kutta法の特性について

6B-7

小野　俊治，田中　正次，山下　茂

山梨大学

## 1.　はじめに

1965年 ByrneとLambertは、Runge-Kutta法のstep当りの関数計算回数の削減を主眼とした Pseudo - Runnge-Kutta法を提案し、微分方程式が単一の場合の最適公式を導いているが、ここではByrneが報告した最適公式の図形上の確認と連立微分方程式に対する最適公式の導出（使用計算機は ACOS-850 ）について述べたい。[1],[2]

## 2.　Byrne型 2段階法の一般形

常微分方程式の初期値問題 $y'=f(x,y), y(x_0)=y_0$ において、Byrne型２段階法の３段数４次法の一般公式は次の通りである。

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n+\alpha_0 k_{0,n}+\alpha_1 k_{1,n}+\alpha_2 k_{2,n} \\
&\quad +\beta_0 k_{0,n-1}+\beta_1 k_{1,n-1}+\beta_2 k_{2,n-1} \\
k_{0,n} &= hf(x_n,\ y_n) \qquad (2\text{-}1) \\
k_{1,n} &= hf(x_n+\mu_1 h,\ y_n+\mu_1 k_{0,n}) \\
k_{2,n} &= hf(x_n+\mu_2 h,\ y_n+\mu_2 k_{0,n} \\
&\qquad +\mu_3 (k_{1,n}-k_{0,n}))
\end{aligned}
$$

ここで、$\mu_1$，$\mu_2$を自由パラメータとすれば４次法の次数条件式の解系は式 (2-2) で 表すことができる。

$$
\begin{aligned}
&\alpha_0=\{4-5(\mu_1+\mu_2)+18\mu_1\mu_2\}/(12\mu_1\mu_2), \\
&\alpha_1=(4-5\mu_2)/\{12\mu_1(\mu_1-\mu_2)\}, \\
&\alpha_2=(5\mu_1-4)/\{12\mu_2(\mu_1-\mu_2)\}, \qquad (2\text{-}2) \\
&\beta_0=1-\alpha_0,\ \beta_1=-\alpha_1,\ \beta_2=-\alpha_2, \\
&\mu_3=2\mu_2(\mu_2-\mu_1)/\{\mu_1(4-5\mu_1)\}
\end{aligned}
$$

## 3．打ち切り誤差とその大小の判定

k段数p次 Pseudo-Runge-Kutta法 において微分方程式が単一及び連立の各場合の打ち切り誤差の主項をそれぞれ$\gamma_p h^{p+1}$及び$\tilde{\gamma}_p h^{p+1}$とし、文献[3]と同じ記法を用いれば、

$$
\begin{aligned}
\gamma_4 &= a_{41}D^4F+a_{42}F_yD^2F+a_{43}F_y^2D^2F \\
&\quad +a_{44}F_y^3DF+a_{45}DF_yD^2F+a_{46}D^2F_yDF \\
&\quad +a_{47}F_yDFDF_y+a_{48}F_{yy}(DF)^2 \qquad (3\text{-}1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_4 &= \hat{a}_{41}\mathbf{F}^{(4)}+\hat{a}_{42}\mathbf{F}_{,jm}F_jF_m'' \\
&\quad +\hat{a}_{43}\mathbf{F}_{,jkm}F_jF_kF_m'+\hat{a}_{44}\mathbf{F}_{,j}F_j^{(3)} \\
&\quad +\hat{a}_{45}\mathbf{F}_{,j}F_{j,km}F_k'F_m+\hat{a}_{46}\mathbf{F}_{,j}F_{j,k}F_k'' \qquad (3\text{-}2)
\end{aligned}
$$

と表すことができる。

次に、微分方程式が単一及び連立の各場合について、各次数の公式の打ち切り誤差の大小を判定するための尺度として次の５種類の判定基準を使用する。　これらの尺度を公式の打ち切り精度判定基準という。

$$
\begin{aligned}
A_{41} &= 16|a_{41}|+8|a_{42}|+3|a_{43}|+3|a_{44}|+8|a_{45}| \\
&\quad +8|a_{46}|+4|a_{47}|+4|a_{48}|, \\
A_{42} &= \sum_{i=1}^{8}|\hat{a}_{4i}|,\quad A_{43}=\sum_{i=1}^{8}(\hat{a}_{4i})^2, \qquad (3\text{-}3) \\
\mathbf{A}_{42} &= \sum_{i=1}^{6}|\hat{a}_{4i}|,\quad \mathbf{A}_{43}=\sum_{i=1}^{6}(\hat{a}_{4i})^2
\end{aligned}
$$

文字の$\mathbf{A}$は連立微分方程式に対する公式の打ち切り精度判定基準である。

## 4.　安定性とその優劣の判定

連立常微分方程式の安定性は、単一の微分方程式の安定性に帰着される。

いま、テスト方程式 $y'=\lambda y$（$\lambda$：複素数）に (2-1) を適用することより、絶対安定領域$S_4$は

$$
\begin{aligned}
S_4 = \{h\lambda \mid\ & 12\xi_i^2-H_1(h\lambda)\xi_i-H_2(h\lambda)=0, \\
& H_1(h\lambda)=12+18h\lambda+5(h\lambda)^2+2(h\lambda)^3, \\
& H_2(h\lambda)=-[6h\lambda+5(h\lambda)^2+2(h\lambda)^3], \\
& |\xi_i|\leqq 1\ (i=1,2)\} \qquad (4\text{-}1)
\end{aligned}
$$

となる。 ここで、$H_j(h\lambda)$ $(j=1,2)$は$\mu_i$ $(i=1,2,3)$を含んでいないので、絶対安定領域は自由パラメータ$\mu_i$ $(i=1,2,3)$ に無関係に一意に定まることがわかる。

## 5.　丸め誤差に関する性質の判定

各公式の丸め誤差に関する性質を判定する尺度として次に定義する数量を使用する。

$$
R_4=\sum_{i=0}^{2}|\alpha_i|+\sum_{i=0}^{2}|\beta_i|+2|\mu_1|+2|\mu_2|+4|\mu_3| \qquad (5\text{-}1)
$$

これを３段数公式(2-1)の丸め誤差特性判定基準という。

---

On the Characteristics of Byrne Type's Pseudo-Runge-Kutta Methods

Toshiharu ONO, Masatsugu TANAKA, Shigeru YAMASHITA
YAMANASHI University

## 6． Byrne 型 Pseudo-Runge-Kutta 法の特性

3段数4次法の打ち切り精度判定基準の等高線(太い線)と、丸め誤差特性判定基準の等高線(細線)の両者を、図 1 に示す。　この場合自由パラメータは$\mu_1$と$\mu_2$で、それぞれ横軸及び縦軸にとる。　なお、$\mu_1=\mu_2, \mu_1=0, \mu_2=0, \mu_1=4/5$ において(2-2) 式の $\alpha_0 \sim \beta_2, \mu_3$の分母が0になるので、丸め誤差特性判定基準の等高線が密になるのを避けるために 、等高線の高さは 7〜500 に抑える。

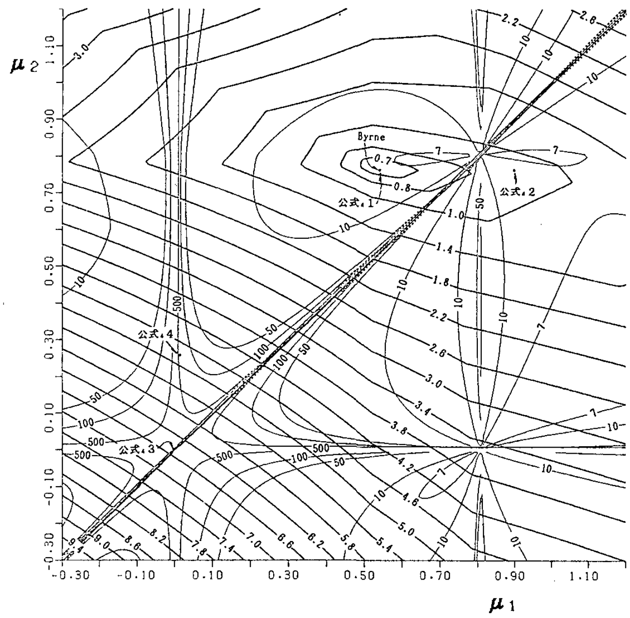


図1　Byrne型3段数4次法の判定基準$A_{41}$
と丸め誤差特性判定基準$R_4$の等高線図

## 7． 既知公式

現在文献等で紹介されている Byrne 型の３段数４次公式は、著者の知る限りでは、Byrne 自身によるもののみであるので、これを評価の対象とする。

表 1　Byrne 型３段数４次法の特性

| 公式名 | 自由パラメータ 上段：$\mu_1$ 下段：$\mu_2$ | 打ち切り精度 判定基準 | 丸め誤差特性 判定基準 | 安定性 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 絶対安定領域面積 | 区間の長さ |
| $Byrne_4$ | .541<br>.763 | .63193611d+00 | .7073d+01 | | |
| 公式$_4$ 1 | .54229<br>.76219 | .17507111d+00 | .7073d+01 | | |
| 公式$_4$ 2 | .87061<br>.76488 | .61949697d+02 | .7421d+01 | | |
| 公式$_4$ 3 | -.00001<br>.00002 | .43062500d-01 | .3333d+10 | 3.611336 | 1.34897 |
| 公式$_4$ $3^{OPT}$ | .13000<br>.78000 | .99944444d-01 | .1343d+02 | | |
| 公式$_4$ 4 | .01425<br>.25939 | .12248598d-02 | .1498d+03 | | |
| 公式$_4$ $4^{OPT}$ | .05000<br>.30000 | .12948495d-02 | .4657d+02 | | |

## 8． 公式の選択

Byrne 型の場合、安定性は自由パラメータに無関係に一意に定まるので、等高線図を利用して打ち切り精度判定基準について特に有意義な公式を選び、ついで丸め誤差の観点を考慮して公式を導いた。　打ち切り精度判定基準$A_{42}, A_{43}, \mathbf{A}_{42}, \mathbf{A}_{43}$が最小となる自由パラメータに対応する公式を順に公式$_4$１,公式$_4$２,公式$_4$３,公式$_4$４とする。　各公式の自由パラメータとその特性値を表 1に示す。

## 9． 数値実験と考察

(１) Byrne は、４次法について$A_{41}$ ( Lotkin の誤差限界の公式の係数のみに依存する係数) を判定基準にした打ち切り精度の観点から最適な公式として$\mu_1=0.541$, $\mu_2= 0.763$ を選んでいるが、図 1 によればこの判断に誤りがないことがわかる。　しかも、丸め誤差特性基準も最良に近いので極めて好ましい公式といえるだろう。

(２) 公式$_4$１は、表 1 から明らかなように打ち切り精度判定基準$A_{41}$においても最小であるから$Byrne_4$ の公式の最適化でもある。 実際、数値実験を行うとわずかながら公式$_4$１が優れている場合が多い。

(３) 公式$_4$２,公式$_4$３,公式$_4$４ およびそれを丸め誤差の観点から最適化した 公式$_4$ $4^{OPT}$ は、$Byrne_4$ の公式 及び 公式$_4$１より数値実験において常に悪い結果が観察され好ましい公式ではない。

(４) 丸め誤差の観点で公式$_4$３を最適化した公式$_4$ $3^{OPT}$は、非線形な連立微分方程式において他の公式よりも優れている例を見つけることができた。

## １０． まとめ

(１)　Byrne 型３段数４次法は、安定性に選択の余地がないので自由パラメータによる公式の特性の制御は、打ち切り精度と丸め誤差の両面から行われることになる。

これを図式的にとらえることにより、我々はさらに性能の良い公式の開発可能性の判定や、任意の公式が与えられたとき、その特性の直感的な評価等が容易に出来る。

(２)　打ち切り精度判定基準にはいろいろな種類があり、全ての判定基準に対して最良の公式は存在しない。

(３)　連立の場合は、今回提案した公式$_4$１と公式$_4$ $3^{OPT}$を推奨する。

### 参考文献


[1] G.D.Byrne & R.J.Lambert : Pseudo-Runge-Kutta methods involving two points
J. Assoc. Comput. March., 13, 114-123.

[2] G.D.Byrne : Parameters for pseudo Runge-Kutta Methos
Comm. ACM,10,102-104.

[3] 田中　正次 : Pseudo-Runge-Kutta 法とその2nd及び3rd order Runge-Kutta法の打ち切り誤差評価への応用について　　情報処理 Vol.10 NO.6 (1969)