6B-5

4段数7次陰的Runge-Kutta法の特性について

田中正次　山下茂　福井康人　渡辺博
山梨大学

1. まえがき　著者たちは，これまで2段数及び3段数陰的Runge-Kutta法の打ち切り誤差特性及び安定特性について研究し，可能で有効なすべての公式の特性が一見して直観的に把握できるグラフを作成し，その図を利用して既知公式の評価と改良・新公式の導出を試みた[1),2)]。この研究はその姉妹編で，同様な目的と意図に基いてなされたものである。

2. 4段数陰的Runge-Kutta法　初期値問題　$y'=f(x,y)$，$y(x_0)=y_0$ (2.1) において，$f(x,y)$ は十分滑らかで，必要な限りの導関数及び偏導関数が存在するものとする。$x=x_n$ における解 y_n が与えられているとき，$x=x_{n+1}$ における数値解 y_{n+1} を，次に示す(2.2)，(2.3)によって求める方法を，4段数陰的Runge-Kutta法という。$y_{n+1}=y_n+\sum_{i=1}^{4}w_i k_i$　$(n=0,1,2\cdots)$ (2.2)
$k_i=h_n f(x_n+a_i h_n,\ y_n+\sum_{j=1}^{4}b_{ij}k_j)$　$h_n=x_{n+1}-x_n$　(2.3)　一般に，S段数陰的Runge-Kutta法の達成可能次数は2Sであるが，ここでは，解系の自由パラメータの選び方により，打ち切り誤差特性や安定特性が多様な変化を示す，7次法について研究する。

3. 次数条件式とその解　4段数7次陰的Runge-Kutta法の次数条件式は，Butcherの条件を用いて一次従属な方程式を除くと，24個のパラメータに関する22個の方程式系に帰着される。我々はその次数条件式群を，a_4，b_{44} を自由パラメータとして解いた。

4. 局所打ち切り誤差とその大小判定　4段数7次陰的Runge-Kutta法の $x=x_{n+1}$ における数値解 y_{n+1} の局所打ち切り誤差を T_{n+1} とすると，$T_{n+1}=t_n h_n^8+O(h_n^9)$　$t_n=\sum_{j=1}^{115}a_{7j}g_j(x_n,y_n)$
(4.1) と書くことができる。ここで a_{7j} は公式の係数パラメータの内の関数，$g_j(x,y)$ は微分方程式(2.1)の右辺の関数系に依存して定まる関数系である[3),4)]。ここでは4段数7次陰的Runge-Kutta法の打ち切り誤差の大小を判定するために，次式によって定義される公式のパラメータの内の関数 A_{72} 及び A_{73} を使用する。　$A_{72}=\sum_{j=1}^{115}|a_{7j}|$　(4.2)　$A_{73}=\sum_{j=1}^{115}a_{7j}^2$　(4.3)
A_{72} 及び A_{73} を4段数7次陰的Runge-Kutta法(2.2)，(2.3)の打ち切り精度判定基準という。これらの判定基準の有効性は，多くの実例によって確められている。特に本例の場合は，$t_1=\sum_{i,j=1}^{4}w_i a_i^3 b_{ij} a_j^3-1/32$　(4.4)　$t_2=\sum_{i=1}^{4}w_i a_i^7-1/8$　(4.5) とおくと，適当に選ばれた正の定数 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ に対して，$A_{72}=\alpha|t_1|+\beta|t_2|$　(4.6)　$A_{73}=\gamma t_1^2+\delta t_2^2$　(4.7) と表すことができるので，打ち切り精度判定基準の計算は極めて簡単であり，またその最適化も容易である。

5. 安定性とその評価[3),4)]　テスト方程式 $y'=\lambda y$ (λは複素定数) (5.1) に4段数7次陰的Runge-Kutta法(2.2)，(2.3)を適用すると，$y_{n+1}=R(h\lambda,\beta_0)y_n$ (5.2) が得られる。ここで $\beta_0=b_{11}+b_{22}+b_{33}+b_{44}$ (5.3) で，安定関数 $R(h\lambda,\beta_0)$ は β_0 の関数である。したがって，β_0 を固定すると絶対安定領域，絶対安定区間などのいわゆる古典的な安定性は一意に定まる。消散方程式，AN安定，BN安定，B安定，代数的安定などの新しい安定性の諸概念は既知であるとしよう。古典的な安定性の優劣の評価は，有効絶対安定領域の面積，絶対安定区間の長さ，絶対安定領域の包含関係などによって行う。新しい安定性の概念の中では代数的安定が最も

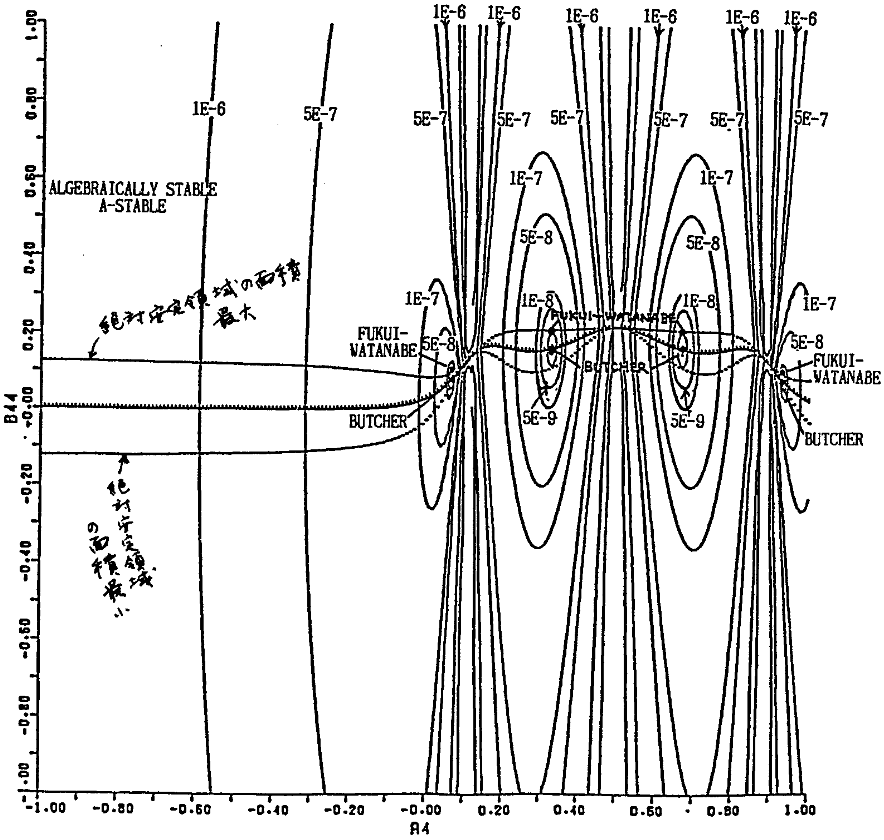
On Characteristics of Seventh Order Implicit Runge-Kutta Methods with Four Stages

Masatsugu Tanaka, Shigeru Yamashita, Yasuhito Fukui, Hiroshi Watanabe
Yamanashi University

強く，代数的安定であればB安定でもあるしまたA安定でもある。

6. 安定性と打ち切り精度の関係（特性図）　Fig.1は，自由パラメータのa_4とb_{44}を両軸にとって，4段数7次陰的Runge-Kutta法(2.2)，(2.3)の打ち切り誤差特性（打ち切り精度判定基準A_{73}の等高線図により示す）と安定特性（絶対安定領域の面積が最大と最小の曲線と，最も強い安定である代数的安定（この解耳においてはA安定と等価）の範囲を図示することにより示す）が，自由パラメータが実用的に有意義な範囲で変動するにつれてどのように変動するかを図示したものである。Fig.1は，既知公式の評価や新公式の導出に関して極めて示唆に富んでいるが，紙面の都合で説明を省く。

7. 絶対安定領域最大の公式群中打ち切り精度最良な公式　4.で述べたように打ち切り精度判定基準A_{73}は，$A_{73}=\gamma t_1^2+\delta t_2^2$と表すことができるが，一方$t_1$はまた$t_1=(2\beta_0-1)/5060$と表されるので，$\beta_0$を任意に与えたとき打ち切り精度最良な公式は，$t_2^2=g(a_4,b_{44})^2$を最小にするパラメータ$a_4, b_{44}$に対応する。その中で特に絶対安定領域最大の公式（$\beta_0=0.626427$）を表1に示す。



FUKUI-WATANABE = our method

Fig.1　安定性と打ち切り精度の関係

表1　安定性、打ち切り精度が最良の公式　（FUKUI-WATANABEの公式）

0.069431844202973	0.10157871763050	−0.063622457710523	0.049645740314929	−0.018170156031937
0.33000947820757	0.16837253304728	0.21304978236951	−0.077893922256341	0.026481085047122
0.66999052179243	0.18693750642677	0.30393951237988	0.21304978236951	−0.033936279383725
0.93056815579703	0.16286756590839	0.35046339236738	0.31565847989077	0.10157871763050
	0.17392742256873	0.32607257743127	0.32607257743127	0.17392742256873

謝辞　特性図に誤りがないかどうかチェックしていただいた4年次生 杉田佳代，田中久恵の両君に感謝する。

文献

1. 田中，山下(忠)，高山，山下，Runge-Kutta法に関する二三の話題について，II 2段数3次陰的Runge-Kutta法の打ち切り精度と安定性の関係，数理解析研究所講究録 585，p.54～p.62 (1986)
2. 田中，三村，山下，陰的Runge-Kutta法の特性について，数理解析研究所講究録 643，p.45～p.73 (1988)
3. Butcher, J. C., The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations (Runge-Kutta and general Linear Methods) John Wiley & Sons (1987)
4. Dekker, K. and Verwer, J.G., Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equations, North-Holland (1984)