n乗根の連分数展開と誤差評価　II

4B-4

海野啓明　・　小沢一文

仙台電波工業高等専門学校

1.　まえがき

正の有理整数Lの n 乗根をαとおき，

$$1,\ \alpha,\ \cdots,\ \alpha^{n-1} \qquad (1.1)$$

に対して Jacobi-Perronのアルゴリズム（ＪＰＡ）による展開を行うと，特別のＬのクラスに対して，この展開が周期を持つことがわかっている[1]．この周期を用いてＪＰＡの漸化式を解くと，(1.1) の数列の有理数近似列を任意の精度で求めることができる．

前報[2]では，$\alpha = \sqrt[n]{D^n+1}$において，D，dおよびnが正整数で，d | D，n ≧ 3　かつ　1 ≦ d ≦ D/(n-3)　の場合[3]を考察した．ＪＰＡの漸化式がn = 3，4の場合に解けること，およびこれらの解である有理数近似列の式は規則性を持つことを示した．その後の計算により，この規則性が一般的に証明されることがわかったのでこれを報告する．また，真の値にｒ次収束（ｒ≧２）する有理数近似列を生成するアルゴリズムを示す．

2.　n乗根の有理数近似

2.1　Jacobi-Perronのアルゴリズム（ＪＰＡ）

n個の実正数

$$1,\ \alpha_1^{(0)},\ \cdots,\ \alpha_{n-2}^{(0)},\ \alpha_{n-1}^{(0)} \qquad (2.1)$$

から漸化式

$$\alpha_{k-1}^{(\nu+1)} = \frac{\alpha_k^{(\nu)} - a_k^{(\nu)}}{\alpha_1^{(\nu)} - a_1^{(\nu)}} \quad (k=1,\cdots,n-1) \qquad (2.2)$$

$$\alpha_{n-1}^{(\nu+1)} = \frac{1}{\alpha_1^{(\nu)} - a_1^{(\nu)}}$$

を用いて新しいn個の実正数

$$1,\ \alpha_1^{(\nu)},\ \cdots,\ \alpha_{n-2}^{(\nu)},\ \alpha_{n-1}^{(\nu)} \qquad (2.3)$$

を生成する．但し，$a_k^{(\nu)} = [\alpha_k^{(\nu)}]$ である．

次の漸化式により$A_k^{(\nu)}$を定義する．

$$A_k^{(\nu)} = \delta_{k\nu} \qquad (k,\nu=0,\cdots,n-1)$$

$$A_k^{(\nu+n)} = A_k^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} A_k^{(\nu+1)} + \cdots + a_{n-1}^{(\nu)} A_k^{(\nu+n-1)} \qquad (2.4)$$

このとき，次式が成立する．

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{A_k^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = \alpha_k^{(0)} \qquad (2.5)$$

もし$\nu \geqq 1$なる整数νにたいして，

$$a_k^{(\nu+m)} = a_k^{(\nu)} \qquad (k=0,\cdots,n-1) \qquad (2.6)$$

ならば，ＪＰＡは周期的である．一般に，最初の l 行

$$1,\ a_1^{(\nu)},\ \cdots,\ a_{n-1}^{(\nu)} \qquad (\nu=0,\cdots,l-1)$$

は”前周期”と呼ばれ，その後にｍ行

$$1,\ a_1^{(\nu)},\ \cdots,\ a_{n-1}^{(\nu)} \qquad (\nu=1,\cdots,l+m-1)$$

の”周期”が現れる．

2.2　n乗根とＪＰＡの周期[3]

定理：　D，d，nは正の整数で，d | D，n ≧ 3かつ1 ≦ d ≦ D／(n-2) のとき

$$\alpha = \sqrt[n]{D^n+d}$$

とおくとn個の数

$$1,\ \alpha,\ \cdots,\ \alpha^{n-1}$$

にたいするＪＰＡは周期的で，（n − 1）行の前周期とn行の周期を持つ（表）．
但し，d = 1の場合は例外で周期は1行である．

定理と漸化式 (2.4)を用いると$A_k^{(\nu)}$が計算できる．(2.4) は線形であるから，その固有方程式は周期の行数分だけ連立したn次方程式となる．次節に，固有値を求め，$A_k^{(\nu)}$の一般式を示す．

The pre-period has the form

$$\begin{array}{llllll}
\binom{0}{0} & \binom{1}{1}D & \binom{2}{2}D^2 & \cdots & \binom{n-2}{n-2}D^{n-2} & \binom{n-1}{n-1}D^{n-1} \\
\binom{1}{0} & \binom{2}{1}D & \binom{3}{2}D^2 & \cdots & \binom{n-1}{n-2}D^{n-2} & \binom{n}{n-1}\frac{D^{n-1}}{d} \\
\binom{2}{0} & \binom{3}{1}D & \binom{4}{2}D^2 & \cdots & \binom{n}{n-2}\frac{D^{n-2}}{d} & \binom{n}{n-1}\frac{D^{n-1}}{d} \\
\cdots\cdots & & & & & \\
\binom{m}{0} & \binom{m+1}{1}D & \binom{m+2}{2}D^2 \cdots \binom{n-1}{n-m-1}D^{n-m-1} & \binom{n}{n-m}\frac{D^{n-m}}{d} & \cdots & \binom{n}{n-1}\frac{D^{n-1}}{d} \\
\cdots\cdots & & & & & \\
\binom{n-2}{0} & \binom{n-1}{1}D & \binom{n}{2}\frac{D^2}{d} & \cdots & \binom{n}{n-2}\frac{D^{n-2}}{d} & \binom{n}{n-1}\frac{D^{n-1}}{d}
\end{array}$$

and the period has the form

$$\begin{array}{llllll}
\binom{n-1}{0} & \binom{n}{1}\frac{D}{d} & \binom{n}{2}\frac{D^2}{d} & \cdots & \binom{n}{n-2}\frac{D^{n-2}}{d} & \binom{n}{n-1}\frac{D^{n-1}}{d} \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1}D & \binom{n}{2}D^2 & \cdots & \binom{n}{n-2}D^{n-2} & \binom{n}{n-1}D^{n-1} \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1}D & \binom{n}{2}D^2 & \cdots & \binom{n}{n-2}D^{n-2} & \binom{n}{n-1}\frac{D^{n-1}}{d} \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1}D & \binom{n}{2}D^2 & \cdots & \binom{n}{n-2}\frac{D^{n-2}}{d} & \binom{n}{n-1}\frac{D^{n-1}}{d} \\
\cdots\cdots & & & & & \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1}D & \binom{n}{2}\frac{D^2}{d} & \cdots & \binom{n}{n-2}\frac{D^{n-2}}{d} & \binom{n}{n-1}\frac{D^{n-1}}{d}.
\end{array}$$

表　定理におけるＪＰＡの前周期と周期．

Error Analysys of Periodical Continued Fractions for Irrationals of Degree of n　II

KAINO Keimei, OZAWA Kazufumi
Sendai National College of Technology

2.3 $A_k^{(\nu)}$の一般式

式の導出は省略し，結果だけを示す[4]．

2.3.1 $d=1$の場合

$\alpha=\sqrt[n]{D^n+1}$のとき，漸化式は

$$A_k^{(\nu+n)}=A_k^{(\nu)}+\binom{n}{1}DA_k^{(\nu+1)}+\cdots+\binom{n}{n-1}D^{n-1}A_k^{(\nu+n-1)}. \qquad (2.7)$$

固有値λ_jは，$\omega=\exp(i2\pi/n)$を用いて，

$$\lambda_j=(\omega^j\alpha-D)^{-1} \qquad (j=0,\cdots,n-1) \quad (2.8)$$

λ_jは次の性質を持つ．

(i) $\Pi_j\lambda_j=1$

(ii) 最大固有値はλ_0である．

$$\lambda_0=D^{n-1}+D^{n-2}\alpha+\cdots+\alpha^{n-1}.$$

このとき，

$$A_k^{(\nu+n-1)}=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\lambda_j^{\nu}}{(\omega^j\alpha)^{n-1-k}}. \qquad (2.9)$$

2.3.2 $d\geqq 2$の場合

$\alpha=\sqrt[n]{D^n+d}$のとき漸化式は，

$$A_k^{(n\nu+2n-1)}=A_k^{(n\nu+n-1)}+a_1^{(n-1)}\times A_k^{(n\nu+n)}+\cdots+a_{n-1}^{(n-1)}A_k^{(n\nu+2n-2)}$$

$$\cdots$$

$$A_k^{(n+3n-2)}=A_k^{(n+2n-2)}+a_1^{(2n-2)}\times A_k^{(n+2n-1)}+\cdots+a_{n-1}^{(2n-2)}A_k^{(n+3n-3)}$$

$$(k=0,\cdots,n-1;\ \nu=0,1,\cdots)$$

固有値Λ_jは，$\omega=\exp(i2\pi/n)$を用いて，

$$\Lambda_j=d(\omega^j\alpha-D)^{-n} \qquad (j=0,\cdots,n-1) \quad (2.10)$$

Λ_iは次の性質を持つ．

(i) $\Pi_j\Lambda_j=1$,

(ii) 最大固有値はΛ_0で，

$$\Lambda_0=d(\alpha-D)^{-n}.$$

(iii) $d=1$のとき，$\Lambda_j=\lambda_j^n$．

このとき，

$$(A_k^{(n\nu+n-1)},\ A_k^{(n\nu+n)},\ \cdots,\ A_k^{(n\nu+2n-2)})=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\Lambda_j^{\nu}}{(\omega^j\alpha)^{n-1-k}}\times(1,\ \lambda'_j,\ \lambda'^2_j/d,\ \cdots,\ \lambda'^{n-2}_j/d^{n-3})$$

$$(k=0,\cdots,n-1;\ \nu=0,1,\cdots) \qquad (2.11)$$

3．n乗根を生成する高次収束のアルゴリズム

(2.11)を用いて，真の値にr次収束する有理数近似列を生成するアルゴリズムを導くことができる．$A_k^{(n\nu+n-1)}=A_k$ とおくと，

$$A_k^{(rn\nu+n-1)}=\sum_p\sum_{k1=0}^{n-1}\cdots\sum_{kr=0}^{n-1}\alpha^{pn}A_{k1}\cdots A_{kr}\times\delta_{k1+\cdots+kr,\,r(n-1)+k-pn} \qquad (2.12)$$

p和は整数について取る．以下に立方根と4乗根に対する2，3次収束のアルゴリズムを示す．

3.1 立方根（n＝3）

$A_k^{(3\nu+2)}=A_k$，　$A_k^{(6\nu+2)}=A_k'$，
$A_k^{(9\nu+2)}=A_k''$　とおくと，

(i) 2次収束法

$$A_0'=2A_0A_2+A_1^2,$$
$$A_1'=\alpha^3A_0^2+2A_1A_2,$$
$$A_2'=2\alpha^3A_0A_1+A_2^2.$$

(ii) 3次収束法

$$A_0''=3(\alpha^3A_0^2A_1+A_0A_2^2+A_1^2A_2),$$
$$A_1''=3\{\alpha^3(A_0^2A_2+A_0A_1^2)+A_1A_2^2\},$$
$$A_2''=\alpha^6A_0^3+\alpha^3(6A_0A_1A_2+A_1^3)+A_2^3.$$

初期値は　$\Delta=3D^3/d$　とおくと，

$$A_0^{(5)}=(3D/d)(1+\Delta),$$
$$A_1^{(5)}=(3D^2/d)(2+\Delta),$$
$$A_2^{(5)}=1+3\Delta+\Delta^2.$$

近似の誤差は，

$$\varepsilon_k^{(3\nu+2)}=A_k/(\alpha^kA_0)-1=c_k\Lambda_0^{-3\nu/2}$$

$$|c_k|\sim 2\sqrt{3} \qquad (k=1,2).$$

3.2 4乗根（n＝4）

$A_k^{(4\nu+3)}=A_k$，　$A_k^{(8\nu+3)}=A_k'$，
$A_k^{(12\nu+3)}=A_k''$　とおくと，

(i) 2次収束法

$$A_0'=2(A_0A_3+A_1A_2),$$
$$A_1'=\alpha^4A_0^2+2A_1A_3+A_2^2,$$
$$A_2'=2(\alpha^4A_0A_1+A_2A_3),$$
$$A_3'=\alpha^4(2A_0A_2+A_1^2)+A_3^2.$$

(ii) 3次収束法

$$A_0''=3\alpha^4(A_0^2A_2+A_0A_1^2)++3A_0A_3^2+6A_1A_2A_3+A_2^3,$$
$$A_1''=\alpha^4(3A_0^2A_3+6A_0A_1A_2+A_1^3)+3(A_1A_3^2+A_2^2A_3),$$
$$A_2''=\alpha^8A_0^3+3\alpha^4(2A_0A_1A_3++A_0A_2^2+A_1^2A_2)+3A_2A_3^2,$$
$$A_3''=3\alpha^8A_0^2A_1+3\alpha^4(2A_0A_2A_3++A_1^2A_3+A_1A_2^2)+A_1^3.$$

初期値は　$\Delta=2D^4/d$　とおくと，

$$A_0^{(7)}=(4D/d)(1+6\Delta+4\Delta^2),$$
$$A_1^{(7)}=(2D^2/d)(5+16\Delta+8\Delta^2),$$
$$A_2^{(7)}=(4D^3/d)(5+10\Delta+4\Delta^2),$$
$$A_3^{(7)}=1+17\Delta+24\Delta^2+8\Delta^3.$$

近似誤差は，

$$\varepsilon_k^{(4\nu+3)}=A_k/(\alpha^kA_0)-1=c_k(\Lambda_0^3\Lambda_2)^{-\nu/2},$$

$$|c_k|\sim 4 \qquad (k=1,2,3).$$

参考文献

(1) L.Bernstein: Lecture Notes in Mathematics, vol.207,Springer-Verlag, Berlin, 1971.

(2)海野，小沢:第36回情処全大，1B-1，1987.

(3) L.Bernstein: J.f.d.reine angew. Math., 213, pp.31-38, 1964.

(4) 海野,小沢: 仙台電波高専研究紀要，18，1988.