2T-7

2次曲面体の変換に関する一考察

橋本　秋彦　　　末永　康仁
NTTヒューマンインタフェース研究所

1．はじめに

レイ・トレーシング[1]の高速化手法として，再帰的手法を用いてレイトレースと補間を併用する画素選択形光線追跡法[2]が提案されているが，物体の輪郭部分ではまだ冗長に画素がレイトレースされていた．

そこで冗長なレイトレース画素の削減と画質劣化の低減を図るため，透視投影像も併用してレイトレース画素を選択するボーダー・レイトレーシング[3]（BRT）を提案し，数十倍の高速化の効果を実験で確認した[4]．

BRTでは直接見える物体の透視投影像だけを求めていたが，鏡に映る物体や物体の影の透視投影像も求められれば，更に高速化と画質劣化の低減が実現できる．従って，これらの間接的に見える物体の透視投影像を求めることは大変有用である．

本論文では，2次曲面体のシャドウボリュームや，平面による鏡映像は2次曲面体で表せることを示し，4×4のマトリックス演算の組合せで求める手法について論じる．

2．2次曲面体のシャドウボリューム

平行光源は点光源の特殊な場合と見なせるので，ここでは点光源Ｉに照らされた2次曲面体Aのシャドウボリュームについて考察する．一般にシャドウボリュームは光源を焦点とする円錐状の曲面体Pと，影として有効な部分を示す曲面体Qの積として記述できる．

以下，P，Qの形状表現式について別々に検討する．

2．1　Pの表現式

任意の2次曲面体Aは（1）式の4×4マトリックスの2次形式で表される．

$$\overline{x}^{T} A \overline{x} = 0 \quad \cdots(1)$$

光源Iの座標を(l_x, l_y, l_z)として，$(-l_x, -l_y, 0)$方向の平行移動マトリックスをM，$(0, 0, l_z)$を消点とするZ軸方向の透視変換マトリックスをTとおく．2次曲面体Aは上記変換を受けると，次式で示される2次曲面体Cに変換される．

$$C = (T^{-1})^{T} (M^{-1})^{T} A \, M^{-1} \, T^{-1} \cdots(2)$$

ここでCの各要素を以下に定義する．

$$C = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & b_2 & c_1 \\ b_1 & a_2 & b_3 & c_2 \\ b_2 & b_3 & a_3 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & d \end{bmatrix}$$

光源は$z=-\infty$方向からの平行光源に変換される．故にPは，（3）式で表す事ができる．

$$P = M^{T} T^{T} D \; T \; M \quad \cdots(3)$$

ここで，Dは，C上で$\partial C / \partial z = 0$を満たす曲線を含むZ方向の楕円筒である．Dのマトリックスは次式で表される．

$$D = \begin{bmatrix} a_1 a_3 - b_2{}^2 & a_3 b_1 - b_2 b_3 & 0 & a_3 c_1 - b_2 c_3 \\ a_3 b_1 - b_2 b_3 & a_2 a_3 - b_3{}^2 & 0 & a_3 c_2 - b_3 c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 c_1 - b_2 c_3 & a_3 c_2 - b_3 c_3 & 0 & a_3 d - c_3{}^2 \end{bmatrix} \quad \cdots(4)$$

A study on the transformation of quadratic surface
Akihiko HASHIMOTO, Yasuhito SUENAGA
NTT Electrical Communications Laboratories

2．2　Qの表現式

$\partial C / \partial z = 0$で表される平面式Sは C上における影の境界線を含む．

$$S = b_2 x + b_3 y + a_3 z + c_3 = 0 \quad \cdots(5)$$

ところで，アフィン変換によって平面は２次曲面に変換される．故に平面SはT，Mによって２次曲面Rに変換される．このRは２次曲面体A上の影の境界線を含む曲面Qの一つである．

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -b_2 & b_2 l_z \\ 0 & 0 & -b_3 & b_3 l_z \\ -b_2 & -b_3 & 2(\frac{c_3}{l_z} - a_3) & w-d \\ b_2 l_z & b_3 l_z & w-d & -2w \end{bmatrix} \cdots(6)$$

ただし，$w = b_2 l_x + b_3 l_y + a_3 l_z - c_3$

以上で，シャドウボリュームの形状は，式（３）で表現される２次曲面体Pと式（６）で表現される２次曲面体Rの積で表せることを示した．

3．２次曲面体の鏡映像

鏡である平面Mは式（７）で表されているものとする．

$$a x + b y + c z + 1 = 0 \quad \cdots(7)$$

点$\overline{x}$が平面Mに映って見える点$\overline{y}$の座標は式（８）で表される．

$$\overline{y} = M \overline{x} \quad \cdots(8)$$

ここでMを鏡映マトリックスと呼ぶことにする．Mは式（９）で表される．

$$M = \begin{bmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac & -ad \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc & -bd \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 & -cd \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots(9)$$

式（１），（８）より，平面Mに映って見える２次曲面体Bは式（１０）で表される．

$$\overline{x}^T B \overline{x} = 0 \quad \cdots(10)$$

ここで，

$$B = (M^{-1})^T A M^{-1}$$
$$= M^T A M \quad \cdots(11)$$
$$(\because MM = E, \rightarrow M = M^{-1})$$

以上で，平面Mに映る２次曲面体Bのマトリックスは，式（１１）で求めれば良いことを示した．

4．応用

表示すべき２次曲面体全てについて，上記式に従って，鏡映像，シャドウボリュームの形状マトリックスを予め計算する（計算コストは４×４の行列演算数回程度）．次に，その透視投影像を各々のプリミティブIDまたはCSG演算式に対応したID番号で作業用フレームメモリに書き込む．レイトレース時には，画素単位に書き込まれたIDに基づいて輝度計算を行う事により，交点計算の対象を交差物体だけにすることができる．よって，レイ・トレーシングの画質は落とさずに，計算コストはレイ・キャスティング程度に削減することが可能である．また，インクレメンタルな輝度計算方法と組み合わせると，レイ・トレーシングに近い画質でzバッファ法並に高速な，CSGモデルを直接レンダリングする新しい手法を実現できる．

謝辞

小森和昭視覚情報研究部長ならびに視覚情報研究部の皆様に感謝致します．

参考文献

[1]T.Whitted: "An Improved Illumination Model for ... ", Comm.ACM, Vol.23, no.6, pp.343-349, 1980

[2]秋本，間瀬：" 画素選択形光線追跡法"，信学論，Vol.J69-D, No.12, pp 1943-1952, 1986

[3]橋本，秋本，間瀬："ボーダー・レイトレーシング法"，信学会技報，PRU86-110 Vol.86, No.348, pp93-100, 1986

[4]橋本，末永："ボーダー・レイトレーシングの画質と高速化率"，ｸﾞﾗﾌｨｯｸｽとCAD, Vol.87, No.46, 27-3, 1987