

テンソル積曲面モデルの交線算出アルゴリズムについて

4Q-12

中野貢二, 渡辺裕文, 森田啓義, 阪田省二郎

豊橋技術科学大学

1. はじめに

プリミティブな曲面物体を組み合わせて、より複雑な物体モデルを作成したり、物体モデルからNC工作機械の工具径路を計算する場合、交差している2曲面の交線を求める問題が生じる。一般に2曲面の交線は、連立非線形方程式の解によって定められるが<sup>1)</sup>、平面や2次曲面のような簡単な式で与えられる場合を除けば、その方程式を解析的に解くことは困難であり、通常は数値解法が用いられる。最近フィリップスら<sup>2)</sup>は陰関数表現された曲面同士の交線を求めるために、交線が解曲線となる常微分方程式を曲面の定義式から導出し、この方程式を数値的に解くことによって交線を算出する手法を与えた。この微分方程式系は漸近的に安定であるため、初期点の選び方によらず、解は交線に収束するという特徴を有している。本稿では、このフィリップスの方法を一般のテンソル積曲面に対して拡張する。さらにこの方法を用いて、2つの物体モデル間のすべての交線を効率良く求める手法について述べる。

2. 交線を解とする常微分方程式の導出

二つのテンソル積曲面  $P(s, t), Q(u, v)$  の交線は、

$$F(s, t, u, v) \triangleq P(s, t) - Q(u, v) = 0 \quad (1)$$

を満足する  $p = (s, t, u, v)$  によって与えられる。  $F$  の  $x, y, z$  成分をそれぞれ  $F_x, F_y, F_z$  と記す。このとき、(1)式を満たす  $p$  全体は4次元パラメータ空間内における  $F_x=0, F_y=0, F_z=0$  の交線  $S_p$  上の点全体に等しいことに着目し、この交線を解とする自励系の常微分方程式

$$dp/dw = Z(p) \quad (2)$$

を以下のように構成する。まず、  $F(p) \neq 0$  の場合は、  $|F(p)|$  が減少するように  $p$  を変化させる必要があり、そのためには、

$$\begin{aligned} d[F_x^2]/dw &= -F_x^2 \\ d[F_y^2]/dw &= -F_y^2 \\ d[F_z^2]/dw &= -F_z^2 \end{aligned} \quad (3)$$

を満たせば十分である。  $F_x, F_y, F_z$  の単位法線ベクトルを各々  $l, m, n$  とおいて(3)式を整理すると、

$$\begin{aligned} \langle l, Z(p) \rangle &= -F_x / (2 | \text{grad} F_x |) \\ \langle m, Z(p) \rangle &= -F_y / (2 | \text{grad} F_y |) \\ \langle n, Z(p) \rangle &= -F_z / (2 | \text{grad} F_z |) \end{aligned} \quad (4)$$

となる。ここで  $\langle x, y \rangle$  はベクトル  $x$  と  $y$  との内積である。  $l, m, n$  に直交する単位ベクトル  $a$  は、パラメータ空間において  $S_p$  の接線方向になっている。そこで  $p$  が  $S_p$  より離れている場合は、(1)の解  $p$  は  $a$  方向には変化せず、一方、  $S_p$  上にある場合は  $a$  方向に変化するするように  $Z(p)$  を選ぶ。そのためには、  $d(p)$  を  $p$  と  $S_p$  間の距離とし、さらに  $G(\cdot)$  を

$$G(d(p)) = \begin{cases} 1 & d(p) \leq \epsilon \\ 0 & d(p) > \epsilon \end{cases}$$

とおくと、

$$\langle a, Z(p) \rangle = G(d(p)) \quad (5)$$

を満足すればよい。以上より、(3)と(5)を連立して解くことにより  $w$  での  $Z$  が求まり、さらに常微分方程式(1)の初期値問題を解くことによってパラメータの値が確定する。実際の交線はパラメータを曲面式に代入することによって求められる。

3.  $\beta$  2スプライン曲面

本稿では、テンソル積曲面の一つである  $\beta$  2スプライン曲面を対象とした。この曲面の特徴はBスプライン曲面<sup>1)</sup>より表現の自由度が大きく、また  $\beta$  スプライン<sup>3)</sup>より変数が少ないため制御が容易で、両者の長所を併せ持つことである。ここで  $V_{ij} (i, j=1, \dots, n)$  を  $\beta$  2スプライン曲面の制御点とすると、  $\beta$  2ス

On an Algorithm of Calculating Intersection Lines of Two Tensor Product Surface Models

Kanji NAKANO, Hirofumi WATANABE, Hiroyoshi MORITA, Shojiro SAKATA  
TOYOHASHI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

ブライン曲面パッチ  $S_{ij}$  は以下に示すように与えられる<sup>3)</sup>。

$$S_{ij}(\beta; u, v) = \sum_{r=-2}^1 \sum_{k=-2}^1 V_{i+r, j+k} b_r(u) b_k(v),$$

$$0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1.$$

ここで  $b_i (i=-2, \dots, 1)$  は  $\beta$  2スプライン基底関数であり、以下の通りである。

$$b_{-2}(\beta; u) = 2\gamma(1-u),$$

$$b_{-1}(\beta; u) = \gamma(\beta + 8 + u(-3(\beta + 4) + 2u(\beta + 3))),$$

$$b_0(\beta; u) = \gamma(2 + u(6 + u(3(\beta + 2) - 2u(\beta + 3))),$$

$$b_1(\beta; u) = 2\gamma u,$$

$$\gamma = \frac{1}{\beta + 12}.$$

#### 4. 物体モデルの交線算出

複数の曲面パッチを貼り合わせて作成された2つの物体モデル間のすべての交線を求める場合、交差していないパッチ対に対する不必要な処理を避け、かつ1本の交線をパッチ対ごとに切れ切れにではなく、連続した曲線として算出できることが望ましい。この要求を満たすアルゴリズムを以下に示す。なお、アルゴリズムの入力として2物体の曲面パッチの制御点がすでに与えられているものとする。またアルゴリズム内では2物体のパッチ対を登録するテーブルを使用する。

[交線算出アルゴリズム]

- 1) すべての曲面パッチ対に対して、2つのパッチが交差しているかどうかを調べることによって2曲面の交差を判定する(具体的には、一方のパッチの16の制御点のうち、中心に位置する4点から作られる6本の辺と、他方のパッチの中心の3点で作る面との交差を調べている)。交差しているパッチ対が見つければ、2)へ進む。そうでなければ、次のパッチ対を選んで交差チェックを繰り返す。すべてのパッチ対に対してチェックが行われた時点でアルゴリズムは終了する。
- 2) パッチ対がテーブルに登録されているかどうか調べる。もし登録されていないならば3)へ進む。そうでなければ、1)へ戻る。
- 3) 一つのパッチ対に対して2章の方法で交線を算出する。このとき微分方程式を数値的に解いてゆく過程で、始めて交線の上に乗った点の座標を交線ループの終点として記憶しておく。

- 4) 交線の算出が一方のパッチAの境界まで進んだ場合、Aと対をなすパッチBはAに隣接したパッチCとも交差している。したがって、新しいパッチ対(B, C)をテーブルに登録し、3)へ戻り交線算出を続行する。
- 5) 3), 4)の手続きを交線ループの終点に達するまで繰り返す。終点に達した時点で、1)に戻り、別の交線ループの探索を行う。

[アルゴリズム終了]

#### 5. 結果

以上のアルゴリズムを用い、直径が等しい直交する2つの円柱の交線を求めた結果を図1に示す。この場合、各円柱を構成する曲面パッチの数は16で、交線をすべて求めるまで6分28秒要した。パッチの数を変化させた場合、干渉チェックに要する時間はパッチ数の2乗に比例し、交線をすべて求める時間はパッチ数に比例する。今回は形状制御の容易な $\beta$  2スプライン曲面を対象としたが、我々の方法は、テンソル積曲面であればどのような曲面に対しても適用することが出来る。

#### 参考文献

- 1) Faux, I.D. and Pratt, M.J.: "Computational Geometry for Design and Manufacture", ELLIS HORWOOD, (1979).
- 2) Phillips, M.B. and Odell, G.M.: "An Algorithm for Locating and Displaying the Intersection of Two Arbitrary Surfaces", IEEE CG&A, pp.48-58 (1984).
- 3) Barsky, B.A. and DeRose, T.D.: "The Beta2-spline: A Special Case of the Beta-spline Curve and Surface Representation", IEEE CG&A, pp.46-58 (1985).

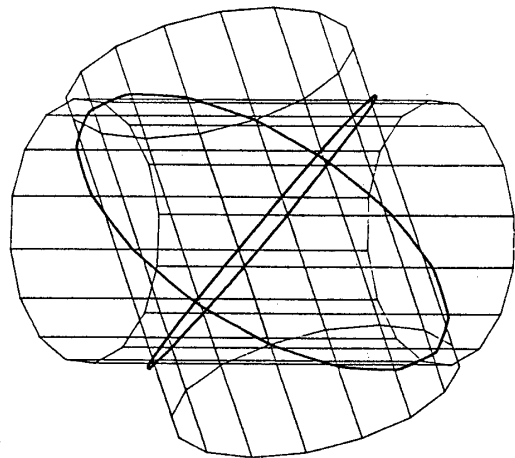


図1 交線の算出例