

# AR モデルにダミー変数を加えたカオス時系列予測法

長瀬 隆 久†

ここ数十年の間に、カオス時系列の予測手法はずいぶん進展した。しかし、指数平滑法のような実務的に有用な簡便法で、カオス時系列を扱えるものは少ないようである。そこで本研究では、線形自己回帰モデルにダミー変数を加えた簡便的なカオス時系列の予測手法を考える。

## Forecasting Method for Chaos Time Series That is AR Model Adding Dummy Variables

NAGASE TAKAHISA†

Forecasting method of chaos time series have been proceeded for this ten years. But, there is a few convenient methods for chaos time series like exponential smoothing. In this study, we examine convenient forecasting method for chaos time series that is liner autoregressive model adding dummy variables.

### 1. はじめに

決定論に従っているにもかかわらず、初期値への鋭敏性を有し非常に複雑な振舞いをするカオスであるが、ここ数十年程度の間には短期予測手法の研究はずいぶん進んだようである<sup>1)</sup>。ところが、それらの手法のたいていは比較的高度な専門知識を必要とする。実際の予測の場面においては、たとえばサプライチェーン・マネジメントの進展により、小売り業界では瞬時に大量の品目の需要予測を行う必要に迫られている。そのような場合、指数平滑法のようないわゆる簡便法と呼ばれる手法のほうが、実務的にはきわめて有効である場合が少なくない。そういった状況下でカオスが発生する可能性を考え、本研究では線形自己回帰モデルにダミー変数を加えることによって、近似的にカオス時系列を予測する簡便法を考える。

### 2. ダミー変数を用いたカオス時系列の予測

まず、典型的なカオスであるロジスティック写像で、  

$$X_t = \alpha X_{t-1}(1 - X_{t-1}) \quad X_0 = 0.1 \quad (1)$$
 パラメータが  $\alpha = 3.7$  の場合を考える。  $X_t$  と  $X_{t-1}$  をプロットしたものは非線形性を有することが知られ

ているが<sup>2)</sup>、この時系列の1次階差をとった系列を  $X'_t$  として、ラグ1の  $X'_t$  と  $X'_{t-1}$  をプロットしたものが図1、またラグ2の場合は図2であり、このように原点付近に部分的な線形性が現れる。そこで、今データ数を100個とし、この階差系列に線形の自己回帰モデルであるAR(2)をあてはめてみる。それが図3であり、自由度調整済み決定係数(以下  $\bar{R}^2$  とする)は  $\bar{R}^2 = 0.7781$  である。図3および残差の図4からも分かるように、左側半分のほうが誤差が大きく、図3より  $-0.6$  以下の値が特徴的な存在であるのが明らかである。全体としてこの値の前後は、時系列の振動

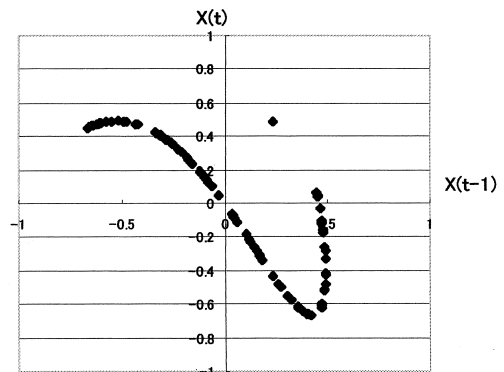


図1 ロジスティック写像の1次階差の散布図(ラグ1)

Fig. 1 Scatter diagram for first-order difference of logistic map (lag 1).

† 総務省郵政研究所第2経営経済研究部

Institute for Post and Telecommunications Policy, Ministry of Public Management

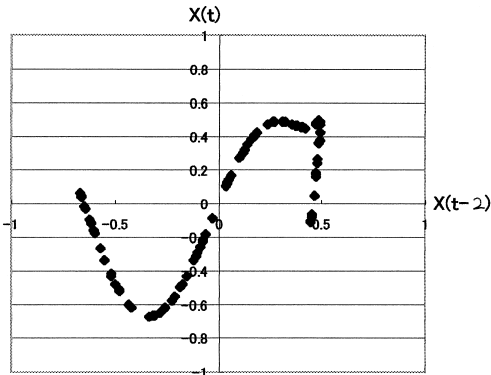


図2 ロジスティック写像の1次階差の散布図(ラグ2)  
Fig. 2 Scatter diagram for first-order difference of logistic map (lag 2).

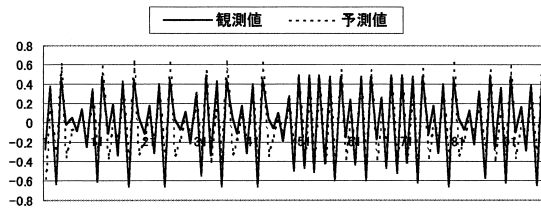


図3 ロジスティック写像の予測(1次階差)  
Fig. 3 Forecasting of logistic map (first-order difference).

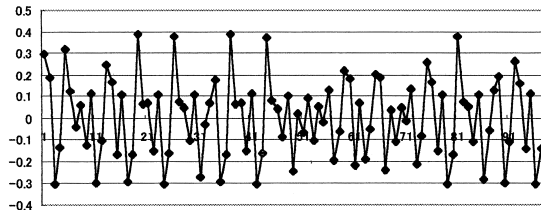


図4 ロジスティック写像の予測誤差(1次階差)  
Fig. 4 Forecast error of logistic map (first-order difference).

する振幅が小さいことが分かる。そこで、被説明変数を  $X_t$  としたとき、1 期前の  $X_{t-1}$  の値が  $-0.6$  以下で「ある: 1, ない: 0」、また 2 期前の  $X_{t-2}$  の値が  $-0.6$  以下で「ある: 1, ない: 0」というダミー変数を考える。この 2 つのダミー変数を加えた回帰分析を行うと、 $\bar{R}^2 = 0.9158$  までの改善が可能でそれをあてはめたものが図 5 である。カオス時系列であるにもかかわらず良好な予測となっている。

さらに時間軸を逆方向にさかのぼると、 $-0.6$  以下の値の前の値も振幅が小さくなっていくので、これも振幅の大きさを基準とし、ダミー変数化できそうであるが、改善後の  $\bar{R}^2$  の値が良好なこともあり、これ以上ダミー変数を増やすと簡便性や汎用性が失われる可

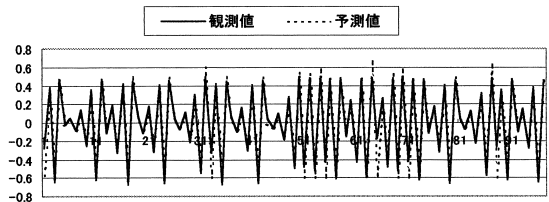


図5 ダミー変数を加えたロジスティック写像の予測  
Fig. 5 Forecasting of logistic map adding dummy variables.

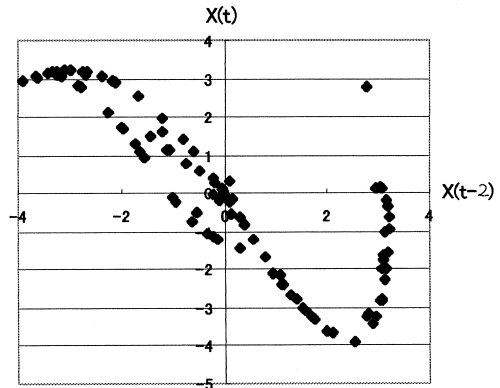


図6 エノン写像の2次階差の散布図(ラグ2)  
Fig. 6 Scatter diagram for second-order difference of henon map (lag 2).

能性があるので今回は割愛する。

次に以下のエノン写像でも同様の回帰分析を行う。

$$X_t = 1 + Y_{t-1} - 1.4X_{t-1}^2$$

$$Y_t = 0.3X_{t-1} \quad X_0 = 0.1 \quad Y_0 = 0.1 \quad (2)$$

これも原系列のアトラクターはロジスティック写像とよく似た非線形性を有することが知られているが<sup>3)</sup>、同様に 1 次階差をとるとやはり部分的に線形性が出てくる。さらにこの場合、2 次階差をとった図 6 のほうが、1 次階差に比べてより線形性が強く出てくるのでこれを用いる。同様にデータ数を 100 個として、この 2 次階差系列に AR(2) をあてはめたものが図 7 で、 $\bar{R}^2 = 0.7779$  である。ここでも、左側半分に多い  $-3.5$  以下の値の前後が特に振動の仕方が異なり誤差も比較的大きい。そのため、同様に  $X_{t-1}$  の値、 $X_{t-2}$  の値が  $-3.5$  以下であるか、ないか、の 2 つのダミー変数を加えて、回帰分析を行った。その結果は  $\bar{R}^2 = 0.8184$  とこれも良好な結果である。ロジスティック写像のときと類似の改善なので、図は省略する。

さらに両者より高次の非線形写像<sup>4)</sup>

$$X_t = 1.9X_{t-1} - X_{t-1}^3 + Y_{t-1}$$

$$Y_t = 0.5X_{t-1} \quad X_0 = 0.1 \quad Y_0 = 0.1 \quad (3)$$

についても調べてみる。これは原系列の  $X_t$  と  $X_{t-1}$

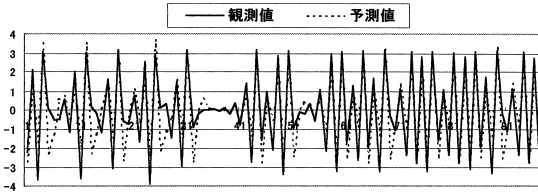


図 7 エノン写像の予測 (2 次階差)  
 Fig. 7 Forecasting of henon map (second-order difference).

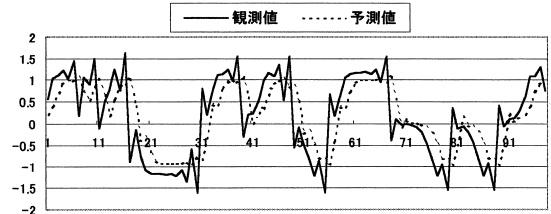


図 9 3 次の非線形写像の予測  
 Fig. 9 Forecasting of three-order nonlinear map.

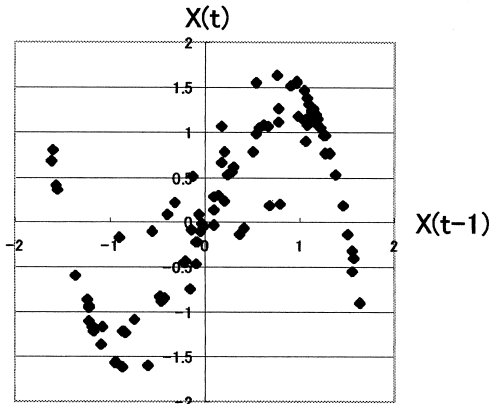


図 8 3 次の非線形写像の散布図 (アトラクター)  
 Fig. 8 Scatter diagram for three-order nonlinear map.

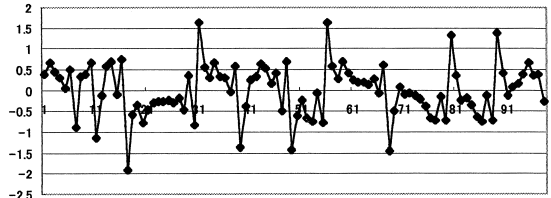


図 10 3 次の非線形写像の予測誤差  
 Fig. 10 Forecast error of three-order nonlinear map.

をプロットした図 8 でカオス・アトラクタが存在するもののすでに部分的な線形性を有している．よって、また同様にデータ数を 100 個として、今度は原系列に  $AR(2)$  をそのままあてはめたものが図 9 であり、 $\bar{R}^2 = 0.5425$  である．図 9 および、残差の図 10 を見れば明確に分かるように、この時系列は  $\pm 1.5$  を超えた次の挙動にかなり特徴があるため、その部分だけ誤差が大きい．したがって、 $X_{t-1}$  が 1.5 以上のときと  $-1.5$  以下のときを 2 つのダミー変数で処理して回帰分析を行った．その結果は、 $\bar{R}^2 = 0.8561$  とこれもまた良好な改善であり、図 11 に示されている．

### 3. 予想が難しい場合

式 (1) のロジスティック写像でも、パラメータ  $\alpha$  が 4.0 等の場合 (同じく  $X_0 = 0.1$ )、同じく 1 次階差に  $AR(2)$  をあてはめたものが図 12 に示してあるが、 $\bar{R}^2 = 0.3426$  と少し精度が悪い．この場合、 $-0.8$  以下の値のときが特徴的である．また、さらに  $-0.95$  以下の値の次には、原点 0 付近に戻る傾向が強い．そこで  $X_{t-1}, X_{t-2}$  が  $-0.8$  以下、さらに、かつ  $-0.95$  以下である場合に各々ダミー変数を用い、また  $-0.8$  以下の値の直前が  $0.5$  以上である確率が高いので、 $X_{t-1}$  が  $0.5$  以上である場合にもダミー変数を用

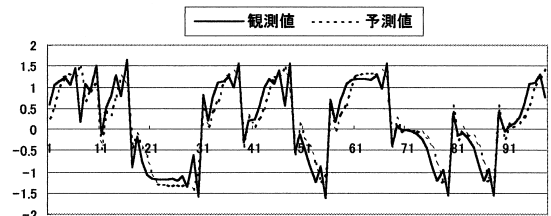


図 11 ダミー変数を加えた 3 次の非線形写像の予測  
 Fig. 11 Forecasting of three-order nonlinear map adding dummy variables.

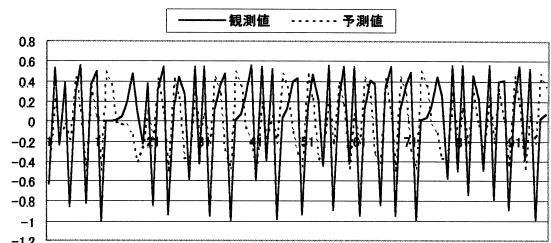


図 12 ロジスティック写像の予測 (1 次階差,  $\alpha = 4.0$ )  
 Fig. 12 Forecasting of logistic map (first-order difference,  $\alpha = 4.0$ ).

い、計 5 つのダミー変数を加え回帰分析を行った．結果は  $\bar{R}^2 = 0.6196$  であり、時系列は図 13 に示されている．このケースが本研究で扱った中でも、最も予測が難しかった例である．それはダミー変数を 5 つ用いていることや精度からも分かる．そのほかにも様々な観点でのダミー変数を試みたがあまり効果はなかった．あてはめが難しかった理由として、図 14 がパラメータが 4.0 のときの  $X'_t$  と  $X'_{t-1}$  をプロットしたものであるが、部分的な線形性もあるが、右半分での強い

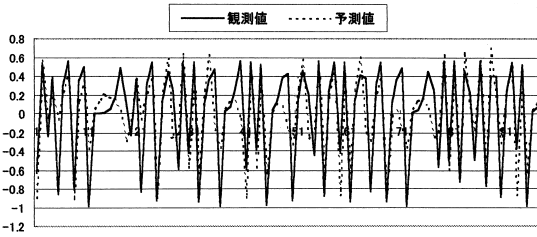


図 13 ダミー変数を加えたロジスティック写像の予測 (1 次階差,  $\alpha = 4.0$ )

Fig. 13 Forecasting of logistic map adding dummy variables (first-order difference,  $\alpha = 4.0$ ).

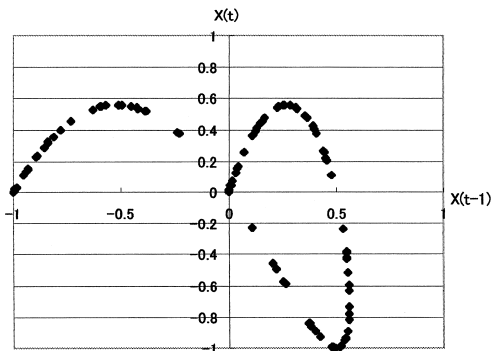


図 14 ロジスティック写像の散点図 (1 次階差,  $\alpha = 4.0$ )

Fig. 14 Scatter diagram for logistic map (first-order difference,  $\alpha = 4.0$ ).

表 1 精度の比較

Table 1 Comparison of accuracy.

	AR(2)	ダミー追加	新たな 100 個
ロジスティック (3.7)	0.7781	0.9158	0.9217
エノン写像	0.7779	0.8184	0.8024
3 次の非線形写像	0.5425	0.8561	0.8178
ロジスティック (4.0)	0.3426	0.6196	0.5358

非線形性が出ていることがあげられる。また、2 次階差をとってもエノン写像とは異なり、そこには線形性は表れなかった。やはり部分的な線形性が比較的明確であることが、本手法の適用には重要である。ロジスティック写像でパラメータが 4.0 に近いもの (3.9 以上) は、今後の課題である。

また、これらすべてのケースで、推定されたパラメータを用いて、その後の 101 ~ 200 番目の時系列データにもあてはめ 1 期先の予測を行った。その際、SSE 等から新たな 100 個の時系列に対する  $\bar{R}^2$  を求め、先に回帰分析を行った場合の 1 番目 ~ 100 番目のデータに対する  $\bar{R}^2$  と比較したのが表 1 であるが、基本的に大きな遜色はなく十分に有用であった。しかしながら、やはりロジスティック写像の  $\alpha = 4.0$  の場合は、他に

比べ精度が落ちるのが分かる。

また、当然のことであるが原系列自体の予測を行うには、階差をとった回数だけ和分を行う必要がある。

#### 4. おわりに

本研究では、カオスを発生させる非線形写像から得られた時系列データを、階差をとることにより部分的な線形性を見出し、線形の自己回帰モデルをあてはめ、その残差等を分析して誤差の大きい部分を考慮したダミー変数を加えることによって、簡便的な予測が行える可能性が十分にあることを示した。従来の予測法でも区分線形や局所線形近似を利用したものがあるが<sup>1)</sup>、本研究で行ったのは新たな簡便的な手法の考察である。カオス時系列の予測にニューラルネット等が使われる場合があるが、ニューラルネットは、過去のパターンを学習して、それをもとに予測を行う手法である。アナロジーでいえば本研究では、こうした時系列のパターン認識をダミー変数を用いて手動で行ったようなものである。

今後は、部分的な線形化やダミー変数のとり方に、客観的な基準を設けることができれば、安心して利用できる簡便法としての可能性が十分にあるといえる。

また、本研究ではカオスの中でも、離散型のものしか扱わなかったが、ローレンツ方程式やレスラー方程式のような連続型のモデルもルンゲ・クッタ法等で離散データへ変換し、あわせて分析を行うことも必要であると思われる。

#### 参考文献

- 1) 合原一幸：カオス学入門，放送大学教育振興会，pp.245-251 (2001).
- 2) Martelli, M.: 離散動的システムとカオス，浪花智英，有本 卓 ( 訳 )，p.29，森北出版 (1999).
- 3) エドガー・ピーターズ：カオスと資本市場，新田 功 ( 訳 )，p.168，白桃書房 (1994).
- 4) 潮 俊光：カオス制御，p.75，朝倉書店 (1996).
- 5) 本多正久：経営のための需要と分析と予測，産能大学出版部 (2000).
- 6) マダラー，G.S.: 計量経済分析の方法，和合 肇 ( 訳 )，シーエーピー出版 (1996).
- 7) Box, G.P., Jenkins, G.M. and Reinsel, G.C.: *Time Series Analysis — Forecasting And Control*, 3rd edition, Prentice Hall International Editions (1994).

(平成 14 年 4 月 15 日受付)

(平成 14 年 9 月 5 日採録)