2Q-7

Mandelbrot集合に関する一考察

伊藤　富夫・齋藤　勝巳・菅澤　喜男
（日本大学生産工学部）

1．はじめに

複素平面上の点αに、（1）$Z_n = Z_{n-1}^2 + \alpha$（ただし$Z_0 = 0$）なる計算を繰り返すと、αの値によって絶対値が無限大に発散してゆく点と、発散しない点とができる。発散しない点の集合をマンデルブロー集合と呼び複素平面上にプロットすると図1のような大変複雑な図形が得られる。

特に集合の境界付近の周辺部において発散の難易度に応じて適当に色分けし詳細に表示すると、枝分かれやうず巻いて入り組んだ様子が図2のように見える。また図3のように集合が線状に延びている部分では分岐や折れ曲がりがあたかも龍のように見える。

今回、この集合を計算するにあたって途中の軌道がどのように分布するかを調べ図4のような結果を得た。

2．マンデルブロー集合

グラフィックディスプレイの各ピクセルを複素数パラメータαと対応させて、適当な範囲を決めて（1）式により計算して表示する。無限大に発散するかどうかは複素数の絶対値が２を越えた時点で近似的に発散と判定して充分であるが、半径２の円形が現れるので今回は半径４で判定した。この判定にそのまま絶対値を取ると平方根の計算に時間がかかるので、実数部と虚数部の２乗の和と半径の２乗とを比較した。繰り返し回数としては十数回でおおまかな集合の様子を現すには充分であり、詳細な表示を行うには数百回繰り返す必要がある、表示する範囲に合わせて変化させると効果的である。この発散するまでの繰り返し回数に応じて表示する色を決めてやれば簡単な計算の繰り返しからは想像もつかない複雑な図形が得られる。

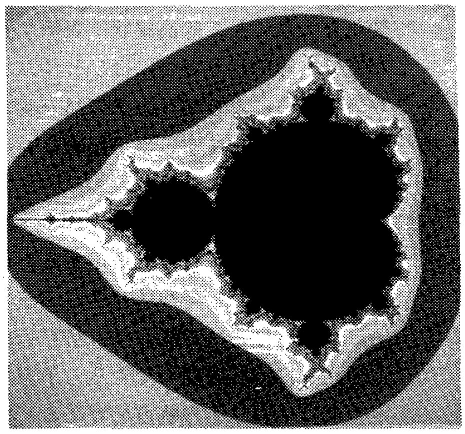

図１．マンデルブロー集合
範囲（横：－２．１～０．９；
縦：－１．５ｉ～１．５ｉ）

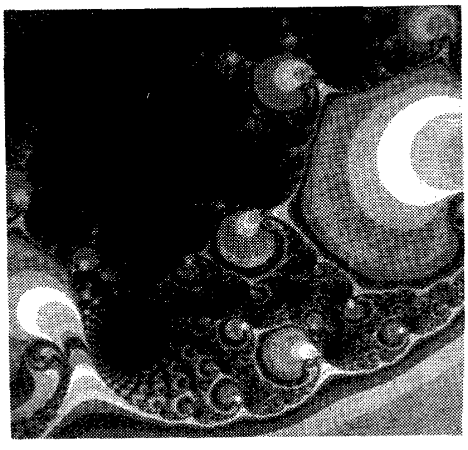

図２．マンデルブロー集合
範囲（横：０．２６９～０．２７１；
縦：０．００４ｉ～０．００６ｉ）

A study of Mandelbrot sets.
Tomio Itoh, Katsumi Saitoh, Yoshio Sugasawa
Nihon University

着色に際して集合の形が線状の場合には色の変化を大きくするより集合部分を強調するのが効果的であり、集合の周辺部を表示するには色の変化を大きくして等高線状に表示すると良い、パソコン等で行う場合にはひとつおきに黒を割り当てる事によりプリンタにハードコピーを取った時に見やすくする事が出来る。

3．計算値の軌道

マンデルブロー集合を表示するために（１）式を次々と計算してゆくときＺの値の変化の様子はαの値によって変わり、通過しやすい区間と通過しにくい区間ができると予想される。特定の点についてその軌道を考えると多くの場合があり複雑と成りそうであるが、全体の軌跡について表示の都合にあわせて区分した区間を通過する回数をカウントする事は簡単に出来るので、その様子をグラフィック表示した物が図４である。軌道の通過しやすい部分と通過しにくい部分が網目状に分布しているのがわかる。

４．まとめ

マンデルブロー集合を表示して見ると、簡単な計算の繰り返しで非常に複雑な世界が展開する事に驚かされる。

集合に含まれない部分では何回で計算を打ち切ったという情報が得られるのに、集合内では計算が終了しないという事しかわからないので視点を変えて途中の軌道がどこを通過しやすいかを考察してみた。とりあえず計算機によりグラフィツク表示したところかなり規則的な網目模様が得られる事がわかった。今後さらに考察を進めて複素数の性質を明かにしてみたい。

－参考文献－

「複素力学系の世界」宇敷　重広
数学セミナー８５年６月～８６年４月
「カオスとフラクタル」山口　昌哉
ブルーバックス

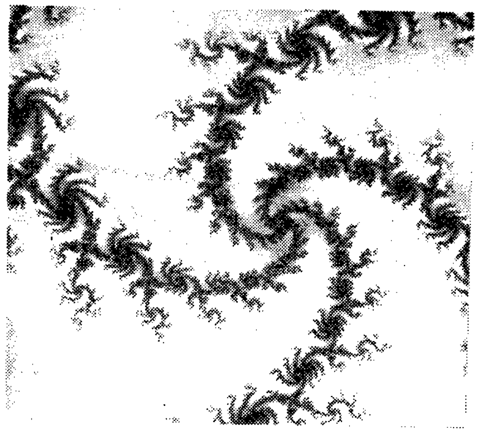

図３．マンデルブロー集合
（横：０．３１８～０．３３８；
縦：０．４８ｉ～０．５０ｉ）

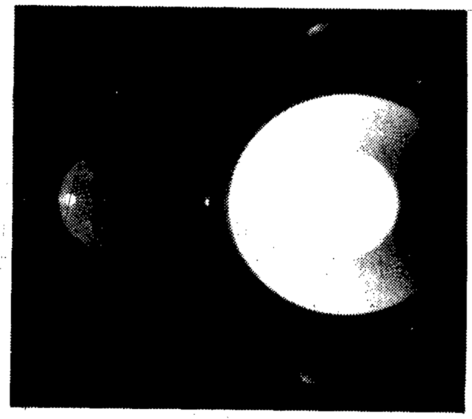

図４．軌道のプロット