方程式の根を求めるプログラム

1X-4

坂田宜子、二宮市三
中部大学

1. はじめに

有限区間内における方程式f(x)=0の全根を求めるプログラムを作成した。本プログラムは(1)全ての根を、それぞれについて与えられた微小幅ε以下の区間に追い込む根の分離部と(2)各微小区間で実際に根の値を求める求根部からなる。(1)については第32回全国大会で発表したとおりであり[1]、今回はそこへ追加した求根プログラムについて主に発表する。本プログラムはf(x)の値のみを用い、かつ連続性だけが条件であるので、多くの方程式に有効であり、実用的である。

2. プログラムの概要

本プログラムは、B.Jonesの手法で1根を追い込んだ1微小部分区間(a,b)を発見すると、直ちにその区間内の根を求める。そして残りの他の根も、この反復処理で得る。

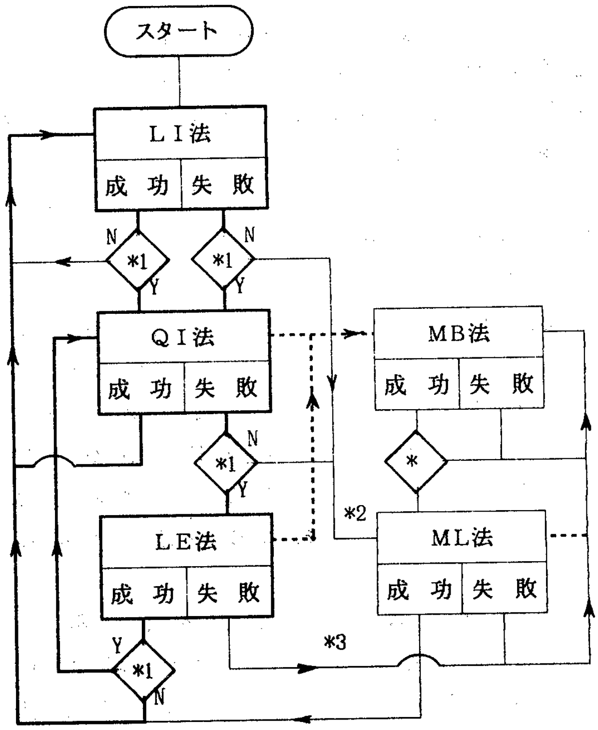
求根プログラムは、(a,b)の両端での関数値が、(1)異符号の場合と、(2)同符号の場合の2つの部分からなる。

(1)の場合は、この区間内に少なくとも1根が存在することは明白なので、これをShrager[2]の示した強力な手法で求める。いま、根を(a,b)の部分区間(X_1,X_2)内に追い込んだものとする。次に(X_1,X_2)内に根の近似値X_3を求め、(X_1,X_3)または(X_3,X_2)のいずれか一方で根を含む方の部分区間を(X_1,X_2)とする。ただし端点X_1,X_2は常に$|f(X_1)|\leq|f(X_2)|$となるようにとるものとする。したがって$X_1<X_2$であるとは限らない。以上を反復して、部分区間の幅を高速、安全にしかも確実に減少させる。

そのために、次の5つの手法

・LI法: Linear Interpolation
・LE法: Linear Extrapolation
・QI法: inverse Quadratic Interpolation
・MB法: Modified Bisection
・ML法: Multiple Linear interpolation

を、流れ図に示すような経路で、たくみに使い分ける。その使い分けはX_3が良い推定値であるか否かによる。即ち、(X_1,X_3)に根があれば、この推定は成功と言える。なぜなら先の不等式が成立するときは、関数値で比べるとX_1の方がX_2より根に近いと推定するのが自然であり、それとX_3の間に根が存在するからである。ところがそうでなく(X_3, X_2)に根があるときは推定は失敗したと



The Program for Finding All Roots of an Equation
Yoshiko SAKATA, Ichizo NINOMIYA
CHUBU UNIVERSITY

言うことにする。なぜならX_2はX_1よりも根から離れていると想像されていて、そのX_2との間に根が存在するからである。５つの手法はこの成功と失敗の２つの出口を持つ。さらに流れ図の(*1)の部分では$|f(X_3)|<|f(X_1)|(<|f(X_2)|)$を調べる。この不等式が成立するのは$X_3$の関数値が$X_1$のそれよりも０に近い場合であり、たとえ$X_3$が失敗で得た結果であっても、事態はそれほど悪くない。しかし流れ線の(*2)や(*3)の部分に出てきたときは悪性の場合であるとしてLI法、QI法、LE法の主要循環経路を捨て、他のMB法やML法を用いる。(*2)はLI法やQI法が失敗に終ってかつ$|f(X_1)|\leqq|f(X_3)|$のとき、即ちX_3の関数値が０より離れる方向にある場合で、基本的にはLI法を加速したML法を用いる。

さらにX_3は常に区間(X_1, X_2)内のX_1よりになるように求める。LI法は$|f(X_1)|\leqq|f(X_2)|$であるからこの要求を満たすことが出来るが、他の手法ではそれは保証されない。そのようなときはそれぞれの手法でX_3を求めることをやめ、急きょ流れ図の点線部を通ってMB法を用いる。MB法は２分法を基にしている。このように一度(X_1, X_2)内に捕捉した根は２度と離すことなく、確実に区間減少を行う。反復の終了は区間(X_1, X_2)の幅が根の精度判定定数ε_zより小さくなるか、またはX_1とX_2が隣り合ってしまってX_3がその一方に一致してしまうか、または$f(X_3)=0$になるかのいずれかである。いずれにしてもこの反復は確実に終了する。

またこのプログラム内でのオーバフロー、０での除算、アンダーフローは安全に避けられているので、これらに起因したプログラムエラーは一切発生しない。

(2)の場合は、区間の両端で関数値の符号が同じであるので、根がx軸で接すると推測される。このときはこの区間での関数の最小値を求める。それにはまず区間の両端の点とその中点を出発点として、放物線近似の極値を次の近似値とする反復を行う。途中で関数値の符号変化が見られれば、その時点で区間を２分し、各区間に(1)の処理を適用する。

３．実行例

いくつかの具体的な例で数値実験を行ったが、ここにはその内の２例を示す。f(X)の計算回数の大部分は根の分離部に使われているのが注目される。

問題	根の分離部			求根部 $\varepsilon_z=1.0D-7$	
	ε	根の存在区間	回数	根の値	回数
1	0.001	8.901－8.911	816	0.8909090909D+01	43
		7.697－7.701		0.7700000000D+01	
		7.634－7.643		0.7636363636D+01	
		6.355－6.366		0.6363636364D+01	
		6.296－6.303		0.6300000000D+01	
		5.089－5.094		0.5090909091D+01	
		4.900－4.905		0.4900000000D+01	
		3.814－3.819		0.3818181818D+01	
		3.497－3.502		0.3500000000D+01	
		2.545－2.547		0.2545454545D+01	
		2.098－2.102		0.2100000000D+01	
		1.271－1.274		0.1272727273D+01	
		0.699－0.701		0.7000000000D+01	
		0.0－0.55D-3		0.0	
2	0.1	312.5－437.5	121	0.3733000000D+03	36
				0.3732000002D+03	
	0.01	371.1－375.0	233	0.3733000000D+03	23
				0.3732000000D+03	
	0.001	373.3－373.7	295	0.3733000000D+03	14
		372.6－373.3		0.3732000000D+03	

εは根の分離判定定数、ε_zは根の精度判定定数
回数はf(x)の計算回数

各番号の式と区間は次の通りである。
1) $f(x)=\sin(\pi x/14)+\sin(3\pi x/2)$　(0,9)
2) $f(x)=1000(x-373.2)(x-373.3)$　(-1000,1000)

プログラムはFORTRAN77で作成し、倍精度で計算した。計算機は中部大学情報処理センターのFACOM M360-APを使用した。

参考文献

1) 坂田、二宮「方程式の根の分離プログラム」情報処理学会第３２回全国大会予稿集

2) R. I. Shrager "A rapid robust rootfinder" Math. of Computation Vol.44, No.169(1985), 151-165