5L-5

Prologによる数学上の定理証明

松浦 聡　中村 克彦
（東京電機大学 理工学部）

1．まえがき

Prologをもちいて数学上の定理証明を行うには、一般につぎのような問題があることが知られている。

①Prologでは一般の節ではなくHorn節が基礎となっている。

②occur check を行っていない。

③多くのシステムでは深さ優先探索を採用しており探索の完全性をもっていない。

定理証明については特に①の問題の解決が必要である。実際のPrologではnot述語の導入によって、この問題の制限を緩めている。Lloyd[1]はnotをもちいて一階の述語論理式の目標をPrologの節に書き換える方法を示しているが、実際の定理証明にもちいるには十分ではない。われわれはPrologに拡張目標と呼ばれる特別な機能を付け加えて定理証明を行う方法を調べている。拡張目標をPrologで扱うには多少の制限が必要であるが、数学上の定理証明を行うには十分であると考えられる。本報告では拡張目標の定義と性質、およびPrologでの実行例を示す。

2．ＥＤ節(Extend Definite Clause)

［定義］われわれはHorn節の目標としてつぎの形式の式を許すことにし、これを拡張目標と呼ぶ。

B ← B1,･･･,Bk (k≧1) '

ここでB,B1,･･･,Bkは原子式である。Bを拡張目標の頭部、B1,...,Bkを拡張目標の副目標と呼ぶ。また、拡張目標を目標としてもつ節をＥＤ節(Extend Definite Clause)と呼ぶ。拡張目標および節の頭部として恒偽を意味する特別な述語(原子式)をinconsistentで表す。

［ＥＤ節の例］

p(X) :- (q(X) ← r(X)).

拡張目標は"B1,･･･,Bkを公理系に付け加えたときにBが証明可能である"という意味を持つ。われわれはＥＤ節を使った証明が正しい証明となるようにつぎの仮定をおく。

①ＥＤ節の拡張目標の頭部がinconsistentという述語でなければ、B1,･･･,Bkを公理系に加えても矛盾が起きない。

②拡張目標の副目標を公理系に加えるときに、B1,･･･,Bkの中に現れる変数はB以外に現れてならない。すなわち、B1,...,Bkの中の変数は拡張目標だけに現れる。

これらの仮定のもとでは記号"←"は含意、","は論理積と同じ意味を持つ。

ここでB1,･･･,Bkを公理系に付け加えることの正当性について考える。つぎの例について考える。

p :- (q←r).というＥＤ節と質問:-p,g1,･･･,gn.の導出形を考える。　p :- (q ← r).を一般の節で表すと、

p :- q.

p ∨ r.

である。これに:-p,g1,･･･,gn.という負節を与えると、

:-q,g1,･･･,gn.　(1)

とr :- g1,･･･,gn.　(2)

が導出される。ここで q :- r.が公理系に存在したとすると

:-r,g1,･･･,gn.　(3)

が導出される。(3)と(2)から

:-g1,･･･,gn.　(4)

が導出される。このときにr :- g1,･･･,gn.の副目標が簡約(factoring)によって消去される（図１）。したがって公理系には r.のみを付け加えればよい。

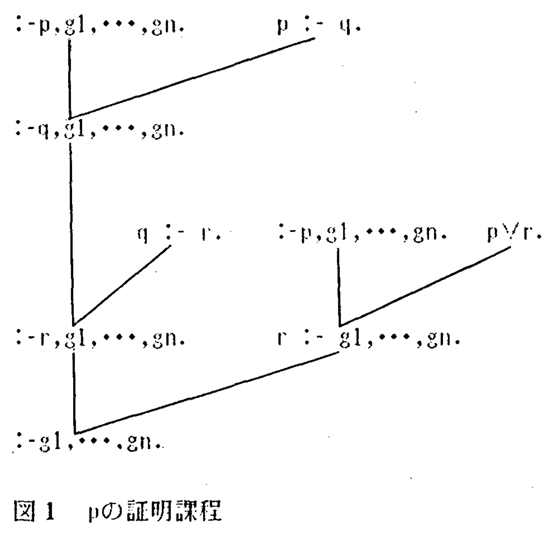

図１　pの証明課程

以上の制限の下でＥＤ節をPrologのプログラムに変換した例を示す

A Method for Theorem Proving by Prolog
Satoshi MATSUURA, Katsuhiko NAKAMURA
TOKYO DENKI UNIVERSITY

ＥＤ節　p(a,X) :- (q(X,Y) ← r(X,Y)).
はPrologのプログラム

```
p(a,X) :-
        nonvar(X),
        nasserta(r(X,Y)),
        q(X,Y),
        nretract(r(X,Y)).
```

に変換される。（公理系に付け加えられる原子式は基礎節(grand clause)であることを仮定している。）ここで、nassertaとnretractはつぎのように定義される述語である。

```
nasserta(C) :- asserta(C).
nasserta(C) :- retract(C),!,fail.

nretract(C) :- nr(C).
nretract(C) :- asserta(C),!,fail.

nr(C) :- retract(C),!.
```

３．ＥＤ節と否定(negation)

一般の定理証明では負節(negative clause)の数は１個とは限らないが、Prologでは質問として与えられる１個しか扱えない。つぎにＥＤ節を用いて負節を扱う方法を述べる。まず、負節$\sim B1 \vee \cdots \vee \sim Bn$をＥＤ節inconsistent :- B1,･･･,Bnで表す。また、証明する命題（通常の質問）は負節のひとつとして公理系に加え、代わりにinconsistentを質問とする。

［例］

公理系$p \leftarrow a, p \leftarrow b, a \vee b$に対して　、pを証明する。

公理系はつぎのＥＤ節で表される。

```
p :- a.
p :- b.
a :- (inconsistent ← b).
b :- (inconsistent ← a).
```

また、定理の否定はつぎの節となる。

```
inconsistent :- p.
```

つぎにPの証明課程を示す。

```
:- inconsistent.        inconsistent :- p.
:- p.                   p :- a.
:- a.                   a :- (inconsistent ← b).
:- (inconsistent ← b).
```

この目標が評価されると、単位節b.が公理系に加えるられる。

```
:- inconsistent.        inconsistent :- p.
:- p.                   p :- b.
:- b.                   b.
□
```

図２　否定をもちいた証明の例

４．例

公理系として

$(\forall N)(\forall M)(N \subset M \leftrightarrow (\forall X)(X \in N \rightarrow X \in M))$

と

$(\forall N)(\forall M)(\forall X)(X \in N \cap M \leftrightarrow X \in N \wedge X \in M)$

が与えられたときに

$(\forall N)(\forall M)(N \subset M \rightarrow N \subset N \cap M)$

を証明する。

上の公理系をＥＤ節で表すと、つぎのようになる。ただしxはskolem関数である。

(1) $N \subset M$:- $(x(N,M) \in M \leftarrow x(N,M) \in N)$.
(2) $X \in M$:- $N \subset M, X \in N$.
(3) $X \in N \cap M$:- $X \in N, X \in M$.
(4) $X \in N$:- $X \in N \cap M$.
(5) $X \in M$:- $X \in N \cap M$.

証明したい定理はつぎの質問によって表される。

?- $(n \subset n \cap m \leftarrow n \subset m)$.

この質問を与えるとPrologの計算は成功し、この定理が証明可能であることが示される。

５．まとめと今後の課題

ＥＤ節を使って定理証明を行うことができた。今後の課題としてＥＤ節の一般的な能力を明らかにすることと、この方法による定理証明のための探索方式を改良することがあげられる。

［参考文献］

[1] Lloyd,J.W and Topor,R.W
Making Prolog More Expressive
Journal of Logic Programming 1984,vol1,NO.3