

離散化制御点による曲面創成方法

加藤 清 敬[†] 三 上 博^{††} 小 山 宏 峰^{†††}
西 村 敬 介^{†††} 川 面 恵 司^{†††}

NURBS 曲面はテンソル積により曲面を定義していることから、簡単な形状でも制御点が多くなる場合や、4 辺形であるという制約から所望の曲面形状を得ることが難しい場合が多々ある。そこで、本研究では NURBS 曲面の性質を引き継ぐとともに、より柔軟に曲面形成可能な制御点ベースの曲面を提案する。本研究では、より柔軟性を持たせるためにノットベクトルを各制御点ごとに独立に持たせることにより、各制御点の間に拘束が生じないようにした点が特徴である。そして、この拡張した NURBS 曲面の特性を理論的に示すとともに、具体的な曲面創成例からその有用性について示す。

Surface Generalization by Scattered Control Points

KIYOTAKA KATO,[†] HIROSHI MIKAMI,^{††} HIROMINE OYAMA,^{†††}
KEISUKE NISHIMURA^{†††} and KEISHI KAWAMO^{†††}

Since a NURBS surface is represented as a tensor product and is a four sided patch, it is hard to represent even simple shapes in some cases. Here, a new surface is proposed, which inherits the characteristics of a NURBS surface and represents arbitrary surfaces flexibly based on control points. In the study, the proposed surface has control points with independent knot vectors, and has no constraints among each control points. Then, the characteristics of this surface is discussed theoretically and some utilities are also shown by some examples.

1. はじめに

NURBS 曲面^{1),2)} はテンソル積で曲面を定義していることから、単純な形状でも制御点が多くなり、また任意トポロジに対応した曲面形状を得ることが難しいなどの難点がある。そして、CAD/CAM システムの開発においては、NURBS 曲面の持つ制約から、その内部アルゴリズムが複雑になり頑健性の低下を引き起こしてきた。また、CAD/CAM システムの利用に際しても、望む形状が得られない、また、苦勞して作成してもデータ量が多くなり、システムダウンにつながるなどの数々の問題点が様々な現場で生じている。現状では、システムの持つ不具合を了解したうえで、回避策を講じるなどの苦勞がなされている。

そのような問題の根元は NURBS 曲面そのものに

あり、根本的に基礎となる曲面創成方法の再検討が必要であると考えられる。現在、基礎となる曲面に関して、Subdivision 法や Multiple Patches 法や Transfinite Surface などより柔軟な曲面形成を行う研究がさかに行われているが^{3)~6)}、ここでは、NURBS 曲面の拡張により、NURBS 曲面の性質を引き継いだ、より柔軟な曲面創成方法を検討する。このために本研究では、ノットベクトルを各制御点ごとに独立に持たせることにより、各制御点の間に拘束が生じないようにする。このような離散化した制御点を持つ NURBS 曲面の構成法とその特性について報告する。

2. NURBS 曲面

2.1 NURBS 曲面の定義

NURBS 曲面は、球面や円柱面などの解析的な面も表現可能な曲面であり次式で与えられる。

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} B_{i,p}(u) B_{j,q}(v) w_{ij} P_{ij}}{\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} B_{i,p}(u) B_{j,q}(v) w_{ij}} \quad (1)$$

ここで、 $B_{i,p}(u)$ 、 $B_{j,q}(v)$ はそれぞれパラメータ u 、

[†] 東京理科大学大学院工学研究科
Graduate School of Engineering, Tokyo University of Science

^{††} 矢崎産業株式会社技術開発センター
Yazaki Technical Center

^{†††} 芝浦工業大学大学院工学研究科
Graduate School of Engineering, Shibaura Institute of Technology

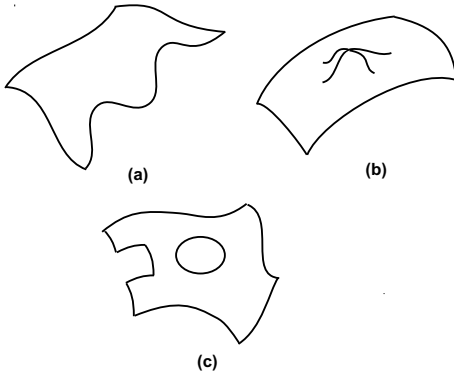


図 1 NURBS 曲面の問題点
Fig. 1 Weak points of a NURBS surface.

v における B-spline 関数である。 i, j は制御点 P_{ij} と重み w_{ij} のインデックス, p, q は階数, M, N は u, v 方向の制御点格子の大きさである。これらの B-spline 関数は 2 つのノットベクトル k_u, k_v の上に定義される。

2.2 NURBS 曲面の問題点

図 1 は, NURBS 曲面の問題点について示した図である。図 1 (a) に示したように, 対向する稜線形状の複雑さが異なったものでも同じノットベクトルで表現しなければならずデータ量が増大し, また, 制御点やノットベクトルの対応付けという複雑な処理が必要であり, 所望の曲面が得られない場合が多い。また, 同図 (b) に示したように中央部分が盛り上がっている形状に対しては, 関係する u, v 方向の分割をしなければ 1 枚の NURBS 曲面では表現が困難である。このような場合中央部分に別のパッチを張ることもできるが, 連続性の保証やトリミングの処理が複雑になる。さらに, 同図 (c) に示すように, 多边形曲面や凹部稜線や穴を有する曲面などの任意トポロジーを持った稜線に対して面を張ることが NURBS 曲面では困難である。以上のような数々の問題点のある NURBS 曲面であるが, 円柱や球などの解析面が表現できるなどの長所は捨て難く, 良い特性は引き継ぎ, かつより柔軟に曲面を形成できる曲面創成方法が求められる。

3. 離散化制御点による NURBS 曲面の拡張

3.1 離散化制御点による拘束の排除

NURBS 曲面は, 式 (1) に示したように制御点をテンソル積で表現する。この場合, u, v 方向の制御点の配置は隣どうしがノットベクトルを共有し, 拘束されたものとなっている。すなわち, NURBS 曲面の局所性は, ノットベクトルが固定で制御点の座標値を变

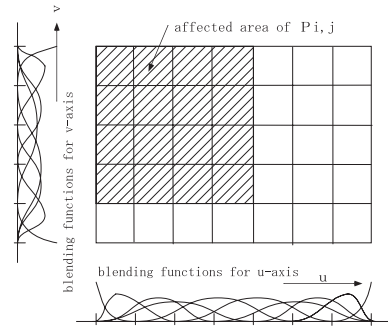


図 2 NURBS 曲面の構造
Fig. 2 Structure of a NURBS surface.

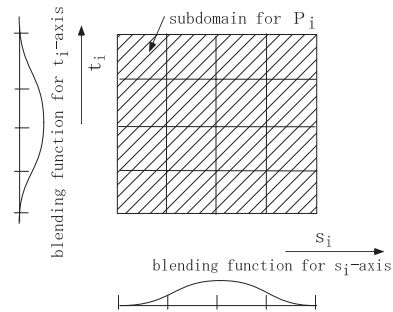


図 3 離散化制御点のサブドメイン
Fig. 3 The subdomain of a scattered control point.

更する場合に成り立つことであるが, ノットベクトルの一部の変更に対してはほぼ面全体に影響を与える性質を本質的に有しているといえる。本研究では, そのような拘束をなくし, ばらばらに散在した制御点から曲面を創成し, 制御点およびノットベクトルの変更が局所的であり, かつ NURBS 曲面を包含する性質を持つ曲面の創成方法を提案する。

3.2 曲面定義

図 2 は, 従来の NURBS 曲面の構造を示したものである。1 つの制御点 $P_{i,j}$ の影響範囲は斜線を施した部分であり, u, v 方向のノットベクトルの配置によりブレンド関数の形が決定される。したがって, 各制御点の影響範囲やブレンドの割合を変化させることは難しい構造となっている。

これに対して提案する曲面は, 図 3 に示したように, 従来の NURBS 曲面の 1 つの制御点とその定義領域を取り出したものを構成要素とし, 1 つの制御点が u, v 定義空間においてその定義領域とブレンド関数を独立に持つ。すなわち, u, v 定義空間上に定義された複数の矩形領域が図のように s_i, t_i 空間で表現される。この s_i, t_i の軸は u, v の各軸と平行である必要はなく回転したものであってもよい。そ

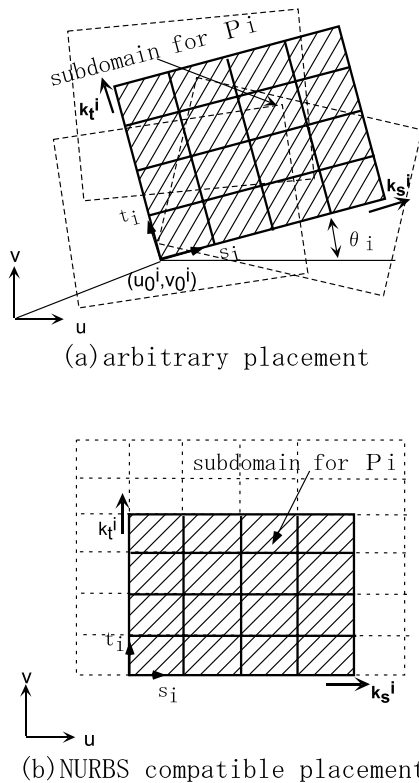


図 4 制御点に対するサブドメインの配置

Fig. 4 Placement of a subdomain for each control point.

して、このように独立した制御点を次に示す式でブレンドングすることにより曲面を形成する。以下、この定義領域をサブドメインと呼ぶこととする。

提案曲面は式 (2) で表現される。

$$\mathbf{S}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i(s_i(u, v), t_i(u, v)) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^{N-1} b_i(s_i(u, v), t_i(u, v)) w_i} \quad (2)$$

ここで、 b_i はパラメータ s_i, t_i から定義される 2 変数のブレンドング関数である。このブレンドング関数は 2 つのノットベクトル k_s^i, k_t^i の上に定義される、 s_i, t_i の軸に対しての B-spline 関数 $B_{i,p_i}^s(s_i)$ と $B_{i,q_i}^t(t_i)$ の積により次のように与える。

$$b_i(s_i, t_i) = B_{i,p_i}^s(s_i) B_{i,q_i}^t(t_i)$$

ここで、 p_i と q_i は B-spline 関数の階数とする。図 4(a) のように u, v 座標系を θ_i 回転させて u_0^i, v_0^i だけ平行移動させたものが s_i, t_i 座標系である。したがって、パラメータ s_i, t_i はパラメータ u, v の関数として式 (3) のように表せる。

$$\begin{bmatrix} s_i \\ t_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u - u_0^i \\ v - v_0^i \end{bmatrix} \quad (3)$$

i は制御点 P_i と重み w_i のインデックス、 N は制御点の数である。

式 (1) の制御点 P_{ij} に掛かる B-spline 関数が $B_{i,p}(u)$ と $B_{j,q}(v)$ であるのに対して、式 (2) の制御点 P_i に掛かる B-spline 関数は $B_{i,p_i}^s(s_i)$ と $B_{i,q_i}^t(t_i)$ になっている。すなわち、従来の NURBS 曲面と同じ形式であるが各制御点が独立のブレンドング関数を持っている点が、提案の曲面の特徴である。また、従来の NURBS 曲面ではすべての B-spline 関数の総和がつねに 1 の部分でのみ定義したが、提案の曲面ではそれを前提としない。しかし、アフィン不変性は保たれる。なぜなら、分母成分による割り算において、すべての制御点に掛かるブレンドング関数の総和は 1 となるからである。

サブドメインは図 4(a) のように任意の位置に配置するが、サブドメインを同図 (b) のように従来の NURBS 曲面のノットベクトルと各サブドメインのノットベクトルが同じとなるように配置することにより、NURBS 曲面との互換性をとることが可能である。これは、このように配置することにより各制御点に対応するサブドメインのブレンドング関数が従来の NURBS 曲面のそれと一致することになるからである。すなわち、式 (1) の制御点 P_{ij} に掛かる $B_{i,p}(u)$ と $B_{j,q}(v)$ と、式 (2) の制御点 P_i に掛かる $B_{i,p_i}^s(s_i)$ と $B_{i,q_i}^t(t_i)$ がそれぞれ一致するからである。

3.3 離散化制御点の設定

離散化制御点 1 つに対して 1 つの定義データ (座標値、重み、ノットベクトル) を設定することによって曲面を表現する。従来型の NURBS 曲面では各制御点がそれぞれ有しているパラメータは制御点座標と重みだけであり、複数の制御点がノットベクトルを共有していた。これに対して、離散化制御点を用いた曲面では、それ以外にサブドメインを変化させて曲面創成を行う。単純な形状は少ない制御点で表現でき、複雑な形状は多くの制御点を集中させて曲面を生成する。

図 5 は同形状の曲面における、従来型 NURBS の制御点配置 (a) と離散化制御点を用いた場合の制御点配置 (b) である。この曲面形状は手前から奥に行くに従って単純な曲面形状から複雑な曲面形状へと変化している。従来型 (a) の制御点は 6×6 の規則的な制御点配置であるが、離散化制御点を用いた (b) では、最も単純な直線部分では 2 点の制御点で曲面を表現し、複雑な形状へと変化するに従って、制御点数を増加さ

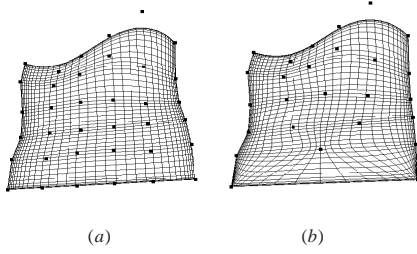


図 5 NURBS 曲面と提案曲面

Fig. 5 A NURBS surface and a proposed surface.

せることによって曲面創成を実現している。

3.4 曲面の特性

提案の曲面における連続性について以下に述べる。この曲面はすでに生成済みの曲面に対して、新たに制御点を任意に付加可能である。生成済みの曲面 $S(u, v)$ をドメイン Ω 上に定義する。新たに加える制御点 P_N を $\omega \subset \Omega$ であるサブドメイン ω とともに追加する。そして、制御点 P_N を加えたことにより生成される曲面を $\tilde{S}(u, v)$ とする。ここで $\Phi = \sum_{i=0}^{N-1} b_i(s_i, t_i)w_i$, $\tilde{\Phi} = \sum_{i=0}^N b_i(s_i, t_i)w_i$ と置く。すなわち、 $\tilde{\Phi} = \Phi + b_N(s_N, t_N)w_N$ とする。以下、各関数の変数を部分的に省略し記述するが下記のとおりである。

$$\begin{aligned} S &= S(u, v), \tilde{S} = \tilde{S}(u, v) \\ \Phi &= \Phi(u, v), \tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}(u, v) \\ b_i &= b_i(s_i, t_i), t_i = t_i(u, v), s_i = s_i(u, v) \end{aligned}$$

(i) $\omega \cap \Omega$ の部分

この部分はサブドメイン ω の外でありブレンディング関数の値がゼロであり、新たに加えた制御点の影響が及ばない。したがって、この部分は、曲面 $S(u, v)$ のそのままの形状を保つことが分かる。

(ii) ω の部分

この部分では次式により曲面が形成される。式 (2) と比較し制御点が 1 つ加えられただけの式である。

$$\tilde{S}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i(s_i(u, v), t_i(u, v))w_i P_i}{\sum_{i=0}^N b_i(s_i(u, v), t_i(u, v))w_i} \quad (4)$$

(iii) ω の境界部分 (Γ)

1 階微分はそれぞれ次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{S}(u, v)}{\partial u} &= \frac{1}{\Phi^2} \sum_{i=0}^N w_i P_i \left(\frac{\partial b_i}{\partial u} \Phi - b_i \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \\ \frac{\partial \tilde{S}(u, v)}{\partial v} &= \frac{1}{\Phi^2} \sum_{i=0}^N w_i P_i \left(\frac{\partial b_i}{\partial v} \Phi - b_i \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) \end{aligned}$$

また、2 階微分についてそれぞれ次式になる。

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}(u, v)}{\partial u^2} = \frac{1}{\Phi^3} \sum_{i=0}^N w_i P_i \left(\frac{\partial^2 b_i}{\partial u^2} \Phi^2 - b_i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} \Phi - 2 \frac{\partial b_i}{\partial u} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial u} + 2b_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)^2 \right)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}(u, v)}{\partial v^2} = \frac{1}{\Phi^3} \sum_{i=0}^N w_i P_i \left(\frac{\partial^2 b_i}{\partial v^2} \Phi^2 - b_i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} \Phi - 2 \frac{\partial b_i}{\partial v} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial v} + 2b_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)^2 \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{S}(u, v)}{\partial u \partial v} &= \frac{1}{\Phi^3} \sum_{i=0}^N w_i P_i \left(\frac{\partial^2 b_i}{\partial u \partial v} \Phi^2 - \frac{\partial b_i}{\partial u} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \Phi \right. \\ &\quad \left. + 2b_i \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\partial b_i}{\partial v} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \Phi - b_i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} \Phi \right) \end{aligned}$$

[定理 1] 境界 Γ において、

$$b_N(s_N, t_N) = 0, \frac{\partial b_N}{\partial s_N} = 0, \frac{\partial b_N}{\partial t_N} = 0$$

ならば、その境界 Γ において、

$$\tilde{\Phi} = \Phi, \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial u} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial v} = \frac{\partial \Phi}{\partial v}$$

が成り立つ。

[定理 2] 境界 Γ において、

$$b_N(s_N, t_N) = 0, \frac{\partial b_N}{\partial s_N} = 0, \frac{\partial b_N}{\partial t_N} = 0$$

$$\frac{\partial^2 b_N}{\partial s_N^2} = 0, \frac{\partial^2 b_N}{\partial t_N^2} = 0, \frac{\partial^2 b_N}{\partial s_N \partial t_N} = 0$$

ならば、その境界 Γ において、

$$\tilde{\Phi} = \Phi, \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial u} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial v} = \frac{\partial \Phi}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v}$$

が成立する。

[定理 3] 境界 Γ において、

$$b_N(s_N, t_N) = 0, \frac{\partial b_N(s_N, t_N)}{\partial s_N} = 0, \frac{\partial b_N(s_N, t_N)}{\partial t_N} = 0$$

$$\frac{\partial^2 b_N}{\partial s_N^2} = 0, \frac{\partial^2 b_N}{\partial t_N^2} = 0, \frac{\partial^2 b_N}{\partial s_N \partial t_N} = 0$$

ならば、その境界 Γ において、

$$\tilde{S}(u, v) = S(u, v), \frac{\partial \tilde{S}(u, v)}{\partial u} = \frac{\partial S(u, v)}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \tilde{S}(u, v)}{\partial v} = \frac{\partial S(u, v)}{\partial v}, \frac{\partial^2 \tilde{S}(u, v)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 S(u, v)}{\partial u \partial v}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}(u, v)}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 S(u, v)}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 \tilde{S}(u, v)}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 S(u, v)}{\partial v^2}$$

が成立する (定理証明は付録に示す) 。

したがって、ブレンディング関数が定理の前提条件を満足すれば、追加した制御点による影響は追加した

制御点の領域内に限定され、追加する前の曲面との接続に関して滑らかな連続性を保証することができる。追加する制御点のサブドメインの境界において、ブレディング関数が2階微分までが零であれば C^2 の連続性が保証される。

なお、以上の定理は、式(2)の曲面が存在することが前提のものであった点に注意を要する。 $\omega \subset \Omega$ でないサブドメインの追加はこのような特性を持つとは限らない。しかし、前述したように従来のNURBS曲面は式(2)で表現可能であり、以上の定理を満たすようにNURBS曲面に制御点を任意に追加することが本曲面の場合には可能である。

3.5 曲面創成の計算量

本曲面の創成にかかわる計算量を、式(1)と式(2)を比較することによって見積もることができる。式(1)のブレディング関数の計算量は u と v のそれぞれのB-spline関数の積であり、式(2)のブレディング関数も s_i と t_i のB-spline関数の積である。すなわち、両者の制御点にかかるブレディング関数と重みの計算量は等価である。したがって、両者の分母と分子の計算量も等価であり、制御点数が等しければ両者の曲面の計算量は等価であることが分かる。ただし、式(2)の曲面では、各制御点がサブドメインを個別に有しているため曲面表現のためのデータ量が増える欠点がある。

3.6 その他

本曲面の形成においては、他のサブドメインとの重なりがなく1つのサブドメインのみから生成される部分は点に縮退したものとなる。また、2つのサブドメインだけが重なった部分は曲面とならず線分に縮退する。面を形成するためには少なくとも3つのサブドメインが重なり合う必要がある。具体的な曲面形成においては、この点に留意する必要がある。

4. 曲面創成

4.1 定義領域の干渉度による曲面形状の変化

定義領域における各制御点間の干渉範囲を自由に設定し変化させることにより、曲面の形状を操作することが可能である。図6は、従来のNURBS曲面のように格子状に制御点を配置したときの定義領域の様子を示したものである。従来のNURBS曲面では、制御点が 6×6 で階数が4のとき、ノットベクトルは 9×9 の区間を持ち、図6のDの部分のみで曲面が定義される。本提案の曲面では、定義領域はサブドメインの存在するところすべてである。同図Aの部分はサブドメインの2次元的な重なりがなく点や線に縮

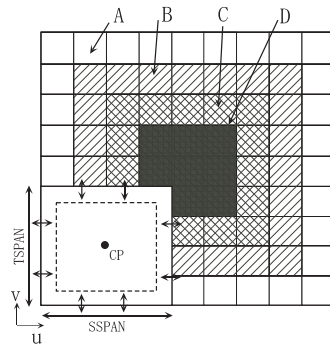


図6 定義領域の重なり制御

Fig. 6 Overlap control of subdomains.

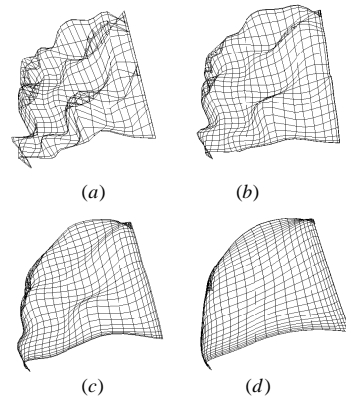


図7 定義領域の重なりによる曲面形状変化

Fig. 7 Surface modification by the overlap of subdomains.

退する。同図Bおよび同図Cの部分はサブドメインの2次元的な重なりがあり、曲面を形成する。同図Dの部分はNURBS曲面と同じ定義領域で曲面を形成する。図中のSSPAN, TSPANで示されたサブドメインは制御点CPの影響領域である。このようなそれぞれのサブドメインを拡大・縮小すると曲面形状に変化を与えることができる。図7は、この様子を示したものであり、これは定義領域どうしの干渉の大きさを順に大きくすると、(a) (b) (c) (d)の順に曲面の平滑化が起きることが分かる。

4.2 定義領域の回転による曲面形状の変化

図8は、1枚の曲面の中央部に制御点を追加して曲面を生成した例である。前節の理論のように追加した部分と追加する前の曲面とが滑らかに融合されていることが分かる。図10の(a)のように、9つの制御点のそれぞれのサブドメインから構成される定義領域(A1)と、その中に新たに追加した制御点のサブドメイン(B1)を基に曲面を生成してある。同図(b)のように、追加した制御点のサブドメインを45度回転させると図9のように、曲面形状を変化させることが

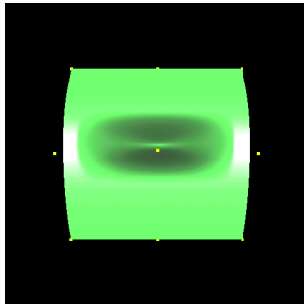


図 8 制御点の追加
Fig. 8 Addition of a control point.

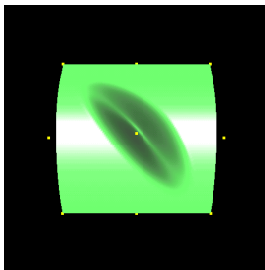


図 9 サブドメインの回転
Fig. 9 A rotated subdomain.

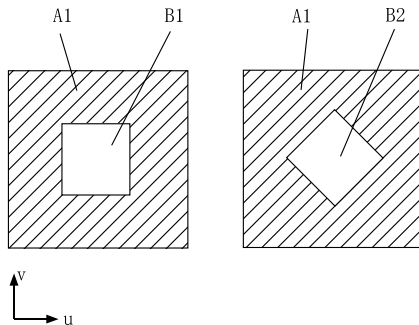


図 10 定義領域 (制御点の追加)
Fig. 10 Domain (Addition of a control point).

できる。この場合においても滑らかに曲面が形成されていることが分かる。なお、図中の点は曲面生成に用いた制御点を示す。

4.3 任意トポロジーへの対応

図 11 は、凹部を有する曲面の創成例である。この定義領域を図 13 に示す。凸部を形成する定義領域の部分を 4 つの制御点による 4 つのサブドメインを A のように配置してある。このような凸部が中心で 4 枚重なるように 90 度ずつずらして配置してある。そして、中央部分にサブドメイン B があり、中央の制御点の影響を与えるように配置してある。図 12 は、さらに中央部に穴を形成させた例である。この曲面の定義領域を図 14 に示した。図 13 と違い、中央部分の重

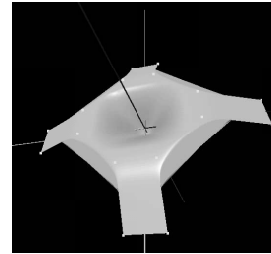


図 11 凹部を有する曲面
Fig. 11 A concave surface.

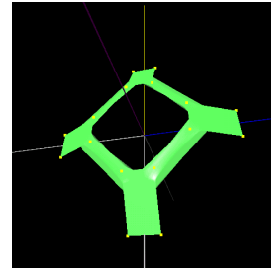


図 12 穴を有する曲面
Fig. 12 A surface with a hole.

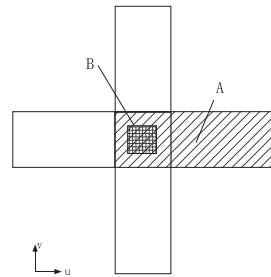


図 13 凸部を有する曲面の定義領域
Fig. 13 Domain of the concave surface.

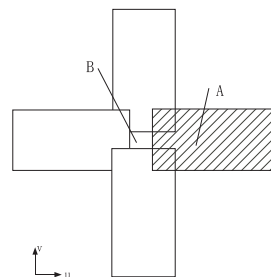


図 14 穴を有する曲面の定義領域
Fig. 14 Domain of the surface with a hole.

なりがないように凸部領域を配置し、また中央の制御点は抜いてある。このように、定義領域に穴を明けることにより、穴の明いた曲面が形成可能である。

以上のことから、この曲面では、サブドメインを任

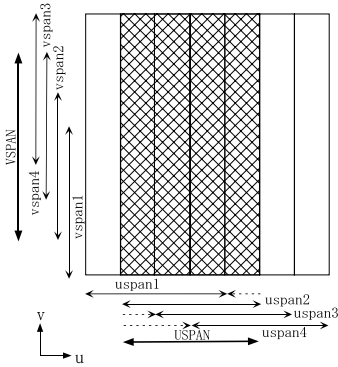


図 15 循環曲面を形成するためのサブドメインの配置

Fig. 15 Placement of subdomains for a periodic surface.

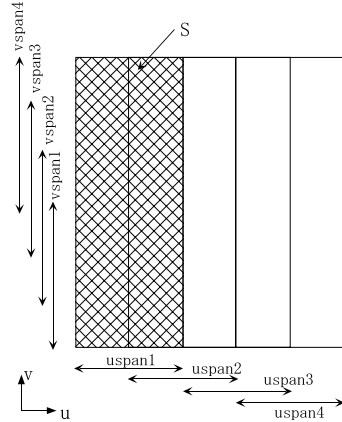


図 17 シャープエッジを形成するためのサブドメインの配置

Fig. 17 Placement of subdomains for sharp edges.

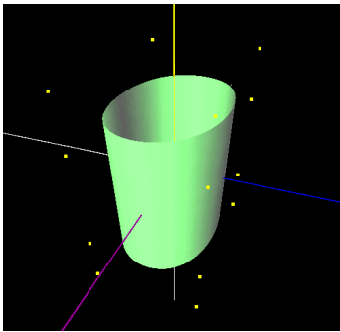


図 16 循環型曲面の創成例

Fig. 16 An example of a periodic surface.

意に配置可能であり、任意トポロジーの曲面形成に有利であると考えられる。

4.4 循環型曲面の対応

図 16 は、循環型の曲面の生成例である。各サブドメインの影響を循環型に設定すれば、このような曲面も容易に形成できる。図 15 は、その定義領域の様子を示したものである。v 方向の曲面生成にかかわる範囲は両端は重なりがないため図中の VSPAN であり、この範囲で vspan1, 2, 3, 4 が重ね合わされている。u 方向については、USPAN が曲面生成にかかわる範囲で循環して uspan1, 2, 3, 4 が重ね合わされている。図中点線の矢印は循環した部分を示している。

4.5 フィレットへの対応

図 19 は、シャープエッジを持つ曲面の生成例である。提案の曲面では、サブドメインの重ね合わせの設定により、このような鋭い稜線を表現することができる。図 17 は、その定義領域を示したものである。S の部分は 1 つのサブドメインの範囲を示している。そして、その重ね合わせる部分を大きくすることにより、フィレットを容易に表現できる。図 19 の稜線にフィ

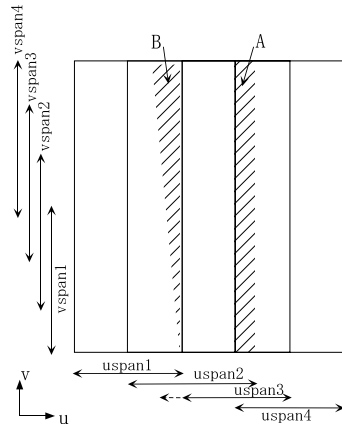


図 18 フィレットを形成するためのサブドメインの配置

Fig. 18 Placement of subdomains for rounded edges.

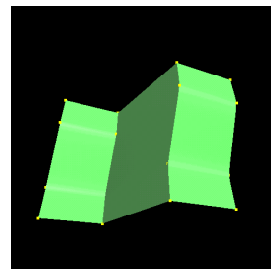


図 19 シャープエッジを持つ曲面の生成例

Fig. 19 An example of a surface with sharp edges.

レット処理を加えたものが図 20 である。図 18 は、その定義領域を示したものである。図 17 の uspan2 の部分の重なりを A のように増やすことで 3 重の重なりを作り容易にフィレットが形成できる。また、uspan3 の部分の重なりを徐々に B のように変えることにより、徐変フィレットが表現できる。サブドメインの重ね合

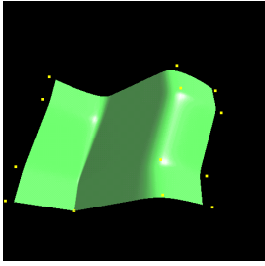


図 20 フィレットを持つ曲面の生成例

Fig. 20 An example of a surface with rounded edges.

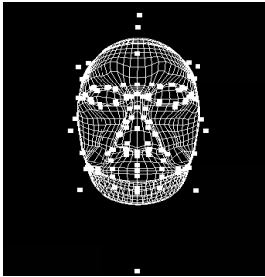


図 21 126 個の制御点による曲面生成例

Fig. 21 An example of complicated surface with 126 control points.

わせの設定をするだけで、このような一定フィレットや徐変フィレットが表現できるから、従来複雑だったフィレット処理の簡素化に期待が持てる。

4.6 その他曲面創成例

図 21 に 126 個の制御点からなる 1 枚の拡張した NURBS 曲面の創成例を示した。同図(左)中の点は制御点である。このような面を従来の NURBS 曲面で生成すると、制御点数やパッチ数が多くなるであろう。また、4 辺形パッチのみではこのような形状を表現することは難しい。目の輪郭などから微細な部分の表現ができていことが分かる。微細な部分に制御点を多く配置しそうでないところには少なく配置することが可能となり、1 枚のパッチでも複雑な形状の生成が可能となること分かる。

5. おわりに

NURBS 曲面を拡張した形式で、制御点の離散化した曲面を提案し、理論的に特性を調べるとともに、具体的な曲面創成例から次のことが分かった。

- (1) 制御点の配置に柔軟性を持たせることができ、曲面形状に対して制御点の削除および追加が自由にできる。
- (2) サブドメインの重なり制御で、曲面の滑らかさを制御可能である。
- (3) フィレット処理などの内部処理を単純化できる可能性がある。
- (4) 凹形状や穴の開いた曲面などの任意トポロジーに対応した曲面創成が可能である。
- (5) 複雑な形状に対しても制御点数を増大させることなく曲面創成が可能である。

問題点としては自由度が増したため形状制御方法が複雑になる点であるが、GUI を工夫することにより対応できると考えられる。

参考文献

- 1) Farin, G.: *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, Inc. (1990).
- 2) Piegl, L.: *The NURBS Book*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1995).
- 3) Malraison, P.: A bibliography for N-sided surfaces, *Mathematics of Surfaces VIII Information Geometry*, Winchester, pp.419–430 (1998).
- 4) Levin, A.: N-sided Holes Using Combines Subdivision Schemes, *Curve and Surface Design* Saint-Malo, pp.221–228 (1999).
- 5) Sone, J., et al.: Surface Interpolation of Non-four-sided and Concave Area by NURBS Boundary Gregory Patches, *Curve and Surface Design*, Saint-Malo, pp.389–398 (1999).
- 6) Kato, K.: N-sided Surface Generation from Arbitrary Boundary Edges, *Curve and Surface Design*, Saint-Malo, pp.173–182 (1999).

付 録

以下の定理証明において、各関数の変数を部分的に省略し記述する。証明中、

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(u, v), \tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{S}}(u, v)$$

$$\Phi = \Phi(u, v), \tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}(u, v)$$

$$b_N = b_N(s_N, t_N)$$

$$t_N = t_N(u, v), s_N = s_N(u, v)$$

である。

A.1 定理 1 の証明

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi} &= \Phi + b_N(s_N, t_N)w_N \text{ から } \tilde{\Phi} = \Phi \\ \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial u} &= \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} b_N(s_N, t_N) \text{ から } \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial u} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \\ \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial v} &= \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v} b_N(s_N, t_N) \text{ から } \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial v} = \frac{\partial \Phi}{\partial v}\end{aligned}$$

これは、境界 Γ 上で次の式が成立することによる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} b_N(s_N, t_N) &= \frac{\partial b_N}{\partial s_N} \frac{\partial s_N}{\partial u} + \frac{\partial b_N}{\partial t_N} \frac{\partial t_N}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial v} b_N(s_N, t_N) &= \frac{\partial b_N}{\partial s_N} \frac{\partial s_N}{\partial v} + \frac{\partial b_N}{\partial t_N} \frac{\partial t_N}{\partial v} = 0\end{aligned}$$

A.2 定理 2 の証明

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial u^2} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 b_N}{\partial u^2} \text{ から } \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial v^2} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 b_N}{\partial v^2} \text{ から } \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 b_N}{\partial u \partial v} \text{ から } \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v}\end{aligned}$$

これは、境界 Γ 上で次の式が成立することによる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial u} b_N(s_N, t_N) &= \frac{\partial^2 b_N}{\partial s_N^2} \left(\frac{\partial s_N}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial b_N}{\partial s_N} \frac{\partial^2 s_N}{\partial u^2} \\ &+ 2 \frac{\partial^2 b_N}{\partial s_N \partial t_N} \frac{\partial s_N}{\partial u} \frac{\partial t_N}{\partial u} + \frac{\partial^2 b_N}{\partial t_N^2} \left(\frac{\partial t_N}{\partial u}\right)^2 \\ &+ \frac{\partial b_N}{\partial t_N} \frac{\partial^2 t_N}{\partial u^2} = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial v^2} b_N(s_N, t_N) &= \frac{\partial^2 b_N}{\partial s_N^2} \left(\frac{\partial s_N}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial b_N}{\partial s_N} \frac{\partial^2 s_N}{\partial v^2} \\ &+ 2 \frac{\partial^2 b_N}{\partial s_N \partial t_N} \frac{\partial s_N}{\partial v} \frac{\partial t_N}{\partial v} + \frac{\partial^2 b_N}{\partial t_N^2} \left(\frac{\partial t_N}{\partial v}\right)^2 \\ &+ \frac{\partial b_N}{\partial t_N} \frac{\partial^2 t_N}{\partial v^2} = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} b_N(s_N, t_N) &= \\ &\frac{\partial^2 b_N}{\partial s_N^2} \frac{\partial s_N}{\partial u} \frac{\partial s_N}{\partial v} + \frac{\partial b_N}{\partial s_N} \frac{\partial^2 s_N}{\partial u \partial v} \\ &+ \frac{\partial^2 b_N}{\partial t_N \partial s_N} \frac{\partial t_N}{\partial u} \frac{\partial s_N}{\partial v} + \frac{\partial^2 b_N}{\partial s_N \partial t_N} \frac{\partial s_N}{\partial u} \frac{\partial t_N}{\partial v} \\ &+ \frac{\partial^2 b_N}{\partial t_N^2} \frac{\partial t_N}{\partial u} \frac{\partial t_N}{\partial v} + \frac{\partial b_N}{\partial t_N} \frac{\partial^2 t_N}{\partial u \partial v} = 0\end{aligned}$$

A.3 定理 3 の証明

$\tilde{\mathbf{S}}(u, v) = \frac{\Phi \mathbf{S}(u, v) + b_N(s_N, t_N) \mathbf{P}_n w_n}{\Phi + b_N(s_N, t_N) w_n}$ であり、
 $b_N(s_N, t_N) = 0$ から境界 Γ で $\tilde{\mathbf{S}}(u, v) = \mathbf{S}(u, v)$ と
なる。また、

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{S}}}{\partial u}(u, v) = \frac{A}{(\Phi + b_N(s_N, t_N) w_n)^2}$$

$$\begin{aligned}A &= \\ &\Phi^2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} + w_n (\mathbf{S} - \mathbf{P}_n) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} b_N - \Phi \frac{\partial b_N}{\partial u} \right) \\ &+ \Phi \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} b_N w_n\end{aligned}$$

である。

$\frac{\partial b_N}{\partial u} = 0$ かつ $\frac{\partial b_N}{\partial t_N} = 0$ であれば $\frac{\partial b_N}{\partial u} = 0$ およ
び $\frac{\partial b_N}{\partial v} = 0$ となるから、境界 Γ において前提条件
が成り立てば、 $\frac{\partial \mathbf{S}(u, v)}{\partial u} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{S}}(u, v)}{\partial u}$ が境界 Γ にお
いて成立する。

また、 $\frac{\partial \mathbf{S}(u, v)}{\partial v} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{S}}(u, v)}{\partial v}$ も同様に証明される。
次に、

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{S}}}{\partial u \partial v}(u, v) &= A / (\Phi + b_N(s_N, t_N) w_n)^2 \\ &- B / (\Phi + b_N(s_N, t_N) w_n)^3\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}A &= \\ &2\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u \partial v} \\ &+ w_n \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} b_N - \Phi \frac{\partial b_N}{\partial v} \right) + w_n (\mathbf{S} - \mathbf{P}_n) \\ &\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} b_N + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial b_N}{\partial u} - \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial b_N}{\partial v} - \Phi \frac{\partial^2 b_N}{\partial u \partial v} \right) \\ &+ \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} b_N w_n + \Phi \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u \partial v} b_N w_n \\ &+ \Phi \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} \frac{\partial b_N}{\partial u} b_N w_n \\ B &= \\ &2 \left((\Phi^2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} + w_n (\mathbf{S} - \mathbf{P}_n)) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} b_N - \Phi \frac{\partial b_N}{\partial v} \right) \right. \\ &\left. + \Phi \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} b_N w_n \right) (\Phi + b_N w_n) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial b_N}{\partial v} w_n \right)\end{aligned}$$

境界 Γ における前提条件から各項が消えて次式が
得られる。

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{S}}(u, v)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \mathbf{S}^2(u, v)}{\partial u \partial v}$$

次に、

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{S}}}{\partial u^2}(u, v) &= A / (\Phi + b_N(s_N, t_N) w_n)^2 \\ &- B / (\Phi + b_N(s_N, t_N) w_n)^3 \\ \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{S}}}{\partial u^2}(u, v) &= A / (\Phi + b_N(s_N, t_N) w_n)^2 \\ &- B / (\Phi + b_N(s_N, t_N) w_n)^3\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 A = & 2\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u^2} \\
 & + w_N \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} b_N - \Phi \frac{\partial b_N}{\partial u} \right) \\
 & + w_N (\mathbf{S}(u, v) - \mathbf{P}_N) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} b_N - \Phi \frac{\partial^2 b_N}{\partial u^2} \right) \\
 & + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} b_N w_N + \Phi \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u^2} b_N w_N \\
 & + \Phi \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \frac{\partial b_N}{\partial u} b_N w_N \\
 B = & 2 \left((\Phi^2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} + w_N (\mathbf{S} - \mathbf{P}_N)) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} b_N - \Phi \frac{\partial b_N}{\partial u} \right) \right. \\
 & \left. + \Phi \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} b_N w_N \right) \left(\Phi + b_N w_N \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial b_N}{\partial u} w_N \right)
 \end{aligned}$$

境界 Γ における前提条件から各項が消えて次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{S}}}{\partial u^2}(u, v) = \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u^2}(u, v)$$

また、 $\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{S}}}{\partial v^2}(u, v) = \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial v^2}(u, v)$ であることも同様に証明される。

(平成 13 年 11 月 6 日受付)

(平成 14 年 11 月 5 日採録)



加藤 清敬 (正会員)

1978 年早稲田大学理工学部電気工学科卒業。同年三菱電機(株)入社。形状処理, CAD/CAM, 数値制御に関する研究開発に従事。1993 年博士(工学, 東京大学)。2000 年より東京理科大学工学部電気工学科助教授。CG, VR, モデリング, システム制御, ロボティクスに関する研究開発に従事。精密工学会, ロボット学会各会員。



三上 博

1999 年芝浦工業大学システム工学部卒業。2001 年同大学大学院修士課程工学研究科機械工学専攻修了。2001 年矢崎総業に入社。現在、矢崎総業技術開発センターにてハイブリッド・電気自動車等の電源技術の開発に従事。



小山 宏峰

2001 年芝浦工業大学システム工学部卒業。現在同大学大学院工学研究科在学中。



西村 敬介

2001 年芝浦工業大学システム工学部卒業。現在同大学大学院工学研究科在学中。



川面 恵司

1959 年早稲田大学第 1 理工学部機械工学科卒業, 三菱電機(株)入社。1963 年カリフォルニア工科大学大学院修士課程機械工学専攻修了。1964 年同博士課程中退。1979 年(株)三菱総合研究所へ転籍, 1986 年工学博士(早稲田大学), 1991 年芝浦工業大学教授に就任。その間, 構造力学, 有限要素法, システム工学, 設計工学, ソフトコンピューティングの研究に従事。現在, 遺伝的アルゴリズムによる構造物の最適化, 汎用最適化ソフトウェアの開発, CAD, NURBS 曲面の拡張, 工学設計手法等の研究開発に力を入れている。日本機械学会, 日本シミュレーション学会, 日本設計工学会に所属する。