Vol.2015-AL-152 No.6
2015/3/3

複数制約式をもつ $0-1$ ナップサック多面体の体積に対する FPTAS

安藤 映[1,a)]　来嶋 秀治[2,b)]

概要: n 次元 $0-1$ ナップサック多面体の体積を求める問題は $\#P$-困難な問題であるが，最近の研究で複数の FPTAS が知られている．本稿ではそのうちの一つの手法を自然に拡張することで m 個の制約式をもつ $0-1$ ナップサック多面体の体積を近似的に計算するアルゴリズムを提案する．m が定数であれば，提案手法は n と $1/\epsilon$ の多項式時間内にの近似比 $1+\epsilon$ 以内である値を出力する．

キーワード: $\#P$-困難，近似アルゴリズム，FPTAS，一様分布

1. はじめに

n 次元空間中の凸体の体積を計算するのは，近似ですら困難な問題である．Lovász [17] は n 次元凸体の体積を計算する問題は，近似比 1.999^n ですら多項式時間アルゴリズムでは実現できないことを証明した．この際の凸体はメンバーシップオラクルによってのみアクセスできるものである．凸体の体積を計算する問題の近似困難性については [3], [8] でも調べられている．

凸体の体積計算などのような $\#P$-困難な問題に対しては，MCMC(Markov chain Monte Carlo) を応用した手法など，いくつかの FPRAS(完全多項式時間ランダム化近似スキーム, Fully Polynomial time Randomized Approximation Scheme) が知られている．例えばメンバーシップオラクルによってのみアクセス可能な一般の凸体の体積について Dyer と Frieze と Kannan の論文 [7] では最初の FPRAS が示されている．彼らのアルゴリズムの実行時間は $O^*(n^{23})$ 時間である．なお，O^* の表記では ϵ や $\log n$ の因子を無視する．その後，アルゴリズムには改良が加えられ， Lovász と Vempala [18] は $O^*(n^4)$ まで実行時間を改善している．

一方で, 決定的な動作をするアルゴリズムで $\#P$-困難な問題に対する近似を与えることも大きな課題である．この方面に関してはまだ多くの結果は知られていない．Weitz [22] は correlation decay の議論により最大次数 $\Delta \geq 5$ のグラフの中での独立点集合の数を数える問題に対して決定的な FPTAS(完全多項式時間近似スキーム, Fully Polynomial Time Approximation Scheme) をを示した．同様のテクニックは Bandyopadhyay と Gamarnik [2] でも独立に示されており，最近になって新しいテクニックも見つかっている (e.g., [4], [9], [13], [14], [16])．$0-1$ ナップサック問題の解を数える問題に対しては Gopalan と Klivans と Meka [10] および，Stefankovic と Vempala と Vigoda [20] には決定的な動的計画法に基づく近似アルゴリズムが示されている ([11] も参照)．この動的計画法は Dyer [5] のランダムサンプリングアルゴリズムによく似た動作を行う．Li と Shi [15] は確率変数の和の分布関数に対する FPTAS を提案しており，このアルゴリズムはナップサック多面体の体積計算にも応用できる．また，安藤と来嶋 [1] は別の方法でナップサック多面体の体積に対する FPTAS を示した．

本研究では，$0-1$ ナップサック多面体を拡張し，複数制約式のナップサック多面体を考える．n 要素の整数列 $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ を m 個考え，$i=1,\ldots,m$ について $\boldsymbol{a}_i=(a_{i1},\ldots,a_{in})$ とする．また，入力にはもう一つ m 要素の整数列 $\boldsymbol{b}=(b_1,\ldots,b_m)$ を考える．そして次のような n 次元多面体 $K_m(\boldsymbol{b})$ を考える．

$$K_m(\boldsymbol{b}) = \left\{ \boldsymbol{x} \in [0,1]^n \mid \bigwedge_{i=1,\ldots,m} \boldsymbol{a}_i^\top \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \right\} \qquad (1)$$

$b_2,\ldots,b_m$ の値を十分大きくとれば $K_m(\boldsymbol{b})$ の特殊ケースとしてナップサック多面体が得られるため，$K_m(\boldsymbol{b})$ の体積を計算する問題は $\#P$-困難である．本稿では $K_m(\boldsymbol{b})$ の体積

1 崇城大学
Sojo University, 4-22-1, Ikeda, Nishi-Ku, Kumamoto, Kumamoto, 860-0082, Japan
2 九州大学
Kyushu University
a) ando-ei@cis.sojo-u.ac.jp
b) kijima@inf.kyushu-u.ac.jp

を計算する問題に対して FPTAS を示す．

本稿は次のように構成されている．第2 節では提案手法のアイディアについて説明し，体積を畳み込み積分の繰り返しで表す方法について説明する．第3 節では $K_m(\boldsymbol{b})$ の体積に対する FPTAS を示す．その後，第4 節でまとめと今後の課題を述べる．

2. 一様分布に従う確率変数の列と $K_m(\boldsymbol{b})$ の体積について

$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ を $[0,1]^n$ に一様に分布した確率変数とする．すると，事象 $\left[\bigwedge_{i=1,\ldots,m} \boldsymbol{a}_i^\top \boldsymbol{X} \leq b_i\right]$ と事象 $[\boldsymbol{X} \in K_m(\boldsymbol{b})]$ が同値であることは明らかである．すなわち，

$$\Pr\left[\bigwedge_{i=1,\ldots,m} \boldsymbol{a}_i^\top \boldsymbol{X} \leq b_i\right] = \Pr\left[\boldsymbol{X} \in K_m(\boldsymbol{b})\right] = \frac{\mathrm{Vol}(K_m(\boldsymbol{b}))}{\mathrm{Vol}([0,1]^n)} = \mathrm{Vol}(K_m(\boldsymbol{b}))$$

である．$f(x)$，$F(x)$ をそれぞれ $[0,1]$ 上の一様分布の密度関数と分布関数とする．

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ x & 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & x \geq 1. \end{cases}$$

ここで，$\Psi_0 \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ を帰納的に定義する．

$$\Psi_0(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{when } \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

次に，$j = 1, 2, \ldots, n$ について漸化式を用いて $\Psi_j \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ を定義する．

$$\Psi_j(\boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{j-1}(\boldsymbol{x} - sA_j) f(s) \mathrm{d}s,$$

ただし $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ である．また，A の 1 列目から j 列目を取り出した部分行列 $A_{[j]} = (A_1 \ldots A_j)$ および，$\boldsymbol{X}$ の $1, \ldots, j$ 番目の要素を取り出した部分ベクトル $\boldsymbol{X}_{[j]} = (X_1, \ldots, X_j)$ を定義する．すると次のことが言える．

命題 1 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ と $x \in \mathbb{R}^m$ について，

$$\Psi_j(\boldsymbol{x}) = \Pr\left[A_{[j]} X_{[j]} \leq \boldsymbol{x}\right]$$

証明 帰納法で証明を行う．まず $j = 1$ の場合について考える．定義より，

$$\Psi_1(\boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0(\boldsymbol{x} - A_1 s) f(s) \mathrm{d}s = \int_{A_1 s \leq \boldsymbol{x}} f(s) \mathrm{d}s = \Pr\left[A_{[1]} X_{[1]} \leq \boldsymbol{x}\right]$$

この場合は命題が正しいことがわかる．

次に，帰納法の仮定として $\Pr\left[A_{[j-1]} X_{[j-1]} \leq \boldsymbol{x}\right]$ が成立すると仮定する．この時，j について同様の指揮が成立することを示す．

$$\begin{aligned}
&\Pr\left[A_{[j]} X_{[j]} \leq \boldsymbol{x}\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pr\left[A_{[j]} X_{[j]} \leq \boldsymbol{x} \mid X_j = s\right] f(s) \mathrm{d}s \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pr\left[A_{[j]} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{j-1} \\ s \end{pmatrix} \leq \boldsymbol{x}\right] f(s) \mathrm{d}s \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pr\left[\bigwedge_{i=1}^{m} [a_1 X_1 + \cdots + a_{i-1} X_{i-1} + a_i s \leq x_i]\right] f(s) \mathrm{d}s \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pr\left[\bigwedge_{i=1}^{m} [a_1 X_1 + \cdots + a_{i-1} X_{i-1} \leq x_i - a_i s]\right] f(s) \mathrm{d}s \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pr\left[A_{[j-1]} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{j-1} \end{pmatrix} \leq \boldsymbol{x} - sA_j\right] f(s) \mathrm{d}s \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{i-1}(\boldsymbol{x} - sA_j) f(s) \mathrm{d}s \\
&= \Psi_i(\boldsymbol{x}).
\end{aligned}$$

以上より，命題が正しいことが示された． □

3. 提案手法について

提案手法は $\Psi_j(\boldsymbol{x})$ を $j = 1, \ldots, n$ のそれぞれの場合について m 次元の階段近似を行うことである．この際，近似を行う範囲は $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ として，$0 \leq x_i \leq jb_i \ \ (i = 1, \ldots, m)$ である．まず $\boldsymbol{x} \in R^m_{\geq 0}$ の場合 $G_0(\boldsymbol{x}) = 1$，そうでない場合は $G_0(\boldsymbol{x}) = 0$ とする．次に，記述を容易にするための中間的なシンボルとして $\overline{G}_j(\boldsymbol{x})$ を考える．

$$\overline{G}_j(\boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{j-1}(\boldsymbol{x} - sA_j) f(s) \mathrm{d}s, \qquad (2)$$

そして，$G_j(\boldsymbol{x})$ は $\overline{G}_j(\boldsymbol{x})$ を m 次元の階段近似したものとする．つまり，$G_j(\boldsymbol{x}) = \overline{G}_j(\boldsymbol{z})$, where $\boldsymbol{z}^\top = (z_1, \ldots, z_k)$, であり，$i = 1, \ldots, m$ について

$$z_i = \max\left\{0, \min\left\{jb_i, \left\lceil \frac{Mx_i}{jb_i} \right\rceil \frac{jb_i}{M}\right\}\right\}$$

である．ここではすべての値を記憶するため，一つの j について，$G_j(\boldsymbol{x})$ を格納するのに $O(M^m)$ のスペースを用いる．最後に，$G_n(\boldsymbol{b})$ を出力して提案手法は終了する．

以下が提案手法の擬似コードである．

Algorithm1

入力: $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_m} \in \mathbb{Z}^n_{>0}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^m_{>0}$.

1. $G_0(\boldsymbol{x}) := 0$ for $\boldsymbol{x} \notin \mathbb{R}^m_{\geq 0}$,

$G_0(\boldsymbol{x}) := 1$ for $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}$ とする;
2. For $j = 1, \ldots, n$
3. For each $\boldsymbol{x} \in \{0, ..., M\}^m$
4. $i = 1, \ldots, m$ について $z_i := x_i b_i / M$ とする;
5. $G_j(\boldsymbol{z})$ を計算する．ただし $\boldsymbol{z}^\top = (z_1, \ldots, z_m)$;
6. $G_n(\boldsymbol{b})$ を出力する．

3.1 実行時間解析

ここでは，$G_j(\boldsymbol{x})$ が $O(\tau m^2 M + mM \log mM)$ 時間で計算できることを示す．ただし，τ は四則演算にかかる時間である．$f(x)$ は一様分布の確率密度関数なので，

$$\overline{G}_j(\boldsymbol{x}) = \int_0^1 G_{j-1}(\boldsymbol{x} - sA_j)\mathrm{d}s \tag{3}$$

である．この積分式 (3) は有理数の和として計算できる．式 (3) の計算のためには，階段近似の格子をなす超平面と積分路の交点 $\mathrm{O}(mM)$ 個を計算する．得られた交点をソートしたのち，式 (3) を $\mathrm{O}(\tau m^2 M)$ 時間で計算する．

階段近似の格子をなす超平面は，j 番目の次元について式 $x_j = hjb_i/M \quad (h \in \mathbb{Z})$ で与えられる．$\overline{G}_j(\boldsymbol{x})$ の計算にあたっては，まず $\boldsymbol{x} - sA_j \quad (0 \leq s \leq 1)$ で与えられる積分路と格子をなす超平面の交点を計算する．まず $j = 1, \ldots, n$ について，j 番目の次元の格子線と積分路の交点を計算する．得られる交点を $\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_u \in \mathbb{R}^m$ とする．これらの交点は一次方程式 $x_i - sa_{ij} = hjb_i/M$ を s について解くことで得られる $(h = 1, \ldots, M, \quad i = 1, \ldots, m)$．そして $\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_u$ のうち一つを求めるためには，得られた s を使って他の $m-1$ 個の成分を求める．よって，$\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_u$ は $\mathrm{O}(\tau u) = \mathrm{O}(\tau m^2 M)$ 時間で計算できる．

次に $\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_u$ をソートする．この時のソート順は $a_{i'}$ を A_j の非 0 成分としたときの，i' 番目の成分の昇順である．クイックソート等を用いると計算時間は $\mathrm{O}(u \log u)$ である．以後，$\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_u$ は昇順にソート済みであるとする．

以上の計算のあと，$\overline{G}_j(\boldsymbol{x})$ を

$$\overline{G}_j(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{u} |\boldsymbol{t}_{k+1} - \boldsymbol{t}_k| G_{j-1}(\boldsymbol{t}_{k+1}), \tag{4}$$

として計算できる．ただし，$\boldsymbol{t}_0 = \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}_{u+1} = \boldsymbol{x} - A_j$ であり，$|\boldsymbol{t}|$ はユークリッドノルムである．一つ $\boldsymbol{x}$ が与えられたとして，$\overline{G}_j(\boldsymbol{x})$ を計算するために提案手法では $|\boldsymbol{t}_{k+1} - \boldsymbol{t}_k| G_{j-1}(\boldsymbol{t}_k - A_j)$ を $\mathrm{O}(\tau m)$ 時間で計算し，u 回繰り返す．

提案手法では $\overline{G}_j(\boldsymbol{x})$ の計算を $(M+1)^m$ 回繰り返す．一つの $\overline{G}_j(\boldsymbol{x})$ の値を計算するのにかかる時間が $\mathrm{O}(\tau m^2 M + mM \log(mM))$ であるので，G_j の値すべてを G_{j-1} から計算するのにかかる時間は $\mathrm{O}(mM^{k+1}(\tau m + \log(mM)))$ である．提案手法をより工夫することで実行時間は更に短縮することが可能であるが，簡単のためここではその内容については触れない．$G_j(\boldsymbol{x})$ の計算は $j = 1, \ldots, n$ について繰り返すため，次の補題を得る．

補題 1 提案手法は $\mathrm{O}(mM^{m+1} n(\tau m + \log(mM)))$ 時間で完了する．

残りは M をどれだけ大きくとることで近似比 $G_n(\boldsymbol{b})/\Psi_n(\boldsymbol{b})$ を $1+\epsilon$ 以内にできるかという部分である．まず，$L_j^\top = (\ell_{1j}, \ldots, \ell_{mj})$ ただし $\ell_{ij} = \sum_{h=1}^{j} \frac{hb_i}{M} = \frac{j(j+1)}{2M} b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$ とする．すると次の補題が証明できる．

補題 2 上述のように $\Psi_j(\boldsymbol{x}), G_j(\boldsymbol{x})$ and $\overline{G}_j(\boldsymbol{x})$ が定義されるとき，$j = 0, \ldots, n$ について

$$\Psi_j(\boldsymbol{x}) \leq G_j(\boldsymbol{x}) \leq \Psi_j(\boldsymbol{x} + jL_j)$$

である．

以下は m 変数関数の平均値の定理として知られている．

定理 1 $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}^m$ とし，$F(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m)$ は $x_1, \ldots, x_m$ のそれぞれよって微分可能であるとする．すると，実数 $0 \leq \theta \leq 1$ が存在して

$$F(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\ell}) = F(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\ell}^\top \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \theta\boldsymbol{\ell})$$

が成立する．ただし，

$$\boldsymbol{f}^\top(\boldsymbol{x}) = \nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_m}(\boldsymbol{x})\right)$$

である．

ある一つの $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ が与えられた場合，以下の補題が成立する．

補題 3 任意の $\epsilon > 0$ について $M \geq mn^2(n+1)/(2\epsilon)$ とすると入力として与えられた $\boldsymbol{b}$ に対して $\Psi_n(\boldsymbol{b}) \leq G_n(\boldsymbol{b}) \leq (1+\epsilon)\Psi_n(\boldsymbol{b} + L_n)$ である．

以上の内容からただちに定理 2 が示せる．

定理 2 任意の $\epsilon > 0$ について $K_m((b))$ を近似比 $1+\epsilon$ で計算する決定性近似アルゴリズムが存在し，実行時間は $\mathrm{O}(m^{m+3} n^{3m+4} (2\epsilon)^{-m-1} (\tau m + \log(mn\epsilon^{-1})))$ である．ただし，τ は四則演算にかかる時間である．

4. まとめと今後の課題

#P-困難な問題に対する FPTAS 設計の技法に刺激を受けて，本論文では制約式を m 個持つ $0-1$ ナップサック多面体の体積を計算する問題を考え，その FPTAS を示した．提案手法は畳み込み積分を階段近似することを繰り返す手法である．提案手法の実行時間は $\mathrm{O}(m^{m+3} n^{3m+4} (2\epsilon)^{-m-1} (\tau m + \log(mn\epsilon^{-1})))$ であり，m が定数であれば実行時間は n と $1/\epsilon$ の多項式である．実行時間には削減の余地が多く残されていて，アルゴリズムに工夫を加えることでより高速なものを作ることができる見込みである．また，提案手法を他の #P-困難な問題に適用することは今後の課題である．

謝辞　本研究は文部科学省 科学研究費補助金 新学術領域研究「多面的アプローチの統合による計算限界の解明」(No. 24106008, 24106005) の助成を受けたものです．

参考文献

[1] E. Ando and S. Kijima, An FPTAS for The Volume Computation of 0-1 Knapsack Polytopes Based on Approximate Convolution Integral, *Proc. of ISAAC 2014*, pp.376–386, 2014.
[2] A. Bandyopadhyay and D. Gamarnik, Counting without sampling: asymptotics of the log-partition function for certain statistical physics models, *Random Structures and Algorithms*, 33, 452–479, 2008.
[3] I. Bárány, Z. Füredi, computing the volume is difficult, *Discrete Computational Geometry*, 2, 319–326, 1987.
[4] M. Bayati, D. Gamarnik, D. Katz, C. Nair, P. Tetali, Simple deterministic approximation algorithms for counting matchings, *Proc. of STOC 2007*, 122–127, 2007.
[5] M. Dyer, Approximate counting by dynamic programming, *Proc. of STOC 2003*, 693–699, 2003.
[6] M. Dyer and A. Frieze, On the complexity of computing the volume of a polyhedron, *SIAM Journal on Computing*, 17(5), 967–974, 1988.
[7] M. Dyer, A. Frieze, R. Kannan, A random polynomial-time algorithm for approximating the volume of convex bodies, *Journal of the Association for Computing Machinery*, 38(1), 1–17, 1991.
[8] G. Elekes, A geometric inequality and the complexity of computing volume, *Discrete Computational Geometry*, 1, 289–292, 1986.
[9] D. Gamarnik, D. Katz, Correlation decay and deterministic FPTAS for counting list-colorings of a graph, *Proc. of SODA 2007*, 1245–1254, 2007.
[10] P. Gopalan, A. Klivans, and R. Meka, Polynomial-time approximation schemes for knapsack and related counting problems using branching programs, arXiv:1008.3187v1, 2010.
[11] P. Gopalan, A. Klivans, R. Meka, D. Štefankovič, S. Vempala, E. Vigoda, An FPTAS for #knapsack and related counting problems, *Proc. of FOCS 2011*, 817–826, 2011.
[12] Ker-I Ko, *Complexity Theory of Real Functions*, Birkhäuser, Boston, 1991.
[13] L. Li, P. Lu, Y. Yin, Approximate counting via correlation decay in spin systems, *Proc. of SODA 2012*, 922–940, 2012.
[14] L. Li, P. Lu, Y. Yin, Correlation decay up to uniqueness in spin systems, *Proc. of SODA 2013*, 67–84, 2013.
[15] J. Li, T. Shi, A fully polynomial-time approximation scheme for approximating a sum of random variables, *Operations Research Letters*, 42, 197–202, 2014.
[16] C. Lin, J. Liu, P. Lu, A simple FPTAS for counting edge covers, *Proc. of SODA 2014*, 341–348, 2014.
[17] L. Lovász, *An Algorithmic Theory of Numbers, Graphs and Convexity*, SIAM Society for industrial and applied mathematics, Philadelphia, 1986.
[18] L. Lovász, S. Vempala, Simulated annealing in convex bodies and an $O^*(n^4)$ volume algorithm, *Journal of Computer and System Sciences*, 72, 392–417, 2006.
[19] S. Mitra, On the probability distribution of the sum of uniformly distributed random variables, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 20(2), 195–198, 1971.
[20] D. Štefankovič, S. Vempala, E. Vigoda, A deterministic polynomial-time approximation scheme for counting knapsack solutions, *SIAM Journal on Computing*, 41(2), 356–366, 2012.
[21] K. Weihrauch, *Computable Analysis An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
[22] D. Weitz, Counting independent sets up to the tree threshold, *Proc. STOC 2006*, 140–149, 2006.