

# 方向統計学を用いた複素信号の位相限定相関関数の統計的解析

八巻 俊輔<sup>†</sup>阿部 正英<sup>‡</sup>川又 政征<sup>‡</sup>東北大学国際高等研究教育機構<sup>†</sup>東北大学大学院工学研究科電子工学専攻<sup>‡</sup>

## 1 まえがき

位相限定相関 (POC: Phase-Only Correlation) 関数は、2つの信号の類似度を評価する関数として、画像マッチングをはじめとするさまざまな分野に幅広く応用されてきた [1]. 著者らのグループは、2つの複素信号の位相スペクトルの差の確率的変動に対する POC 関数の挙動を統計的に解析した [2]. この解析法では、位相スペクトルの差を数直線上に分布する線形データとしてあつかっていた. しかし、信号の位相スペクトルは角度データであるため、方向の情報を利用して POC 関数を統計的に解析するための概念を導入しなければならない.

本論文では、方向統計学 [3] という新しい観点に基づく POC 関数の統計的解析法を提案する. 方向統計学の考え方を導入して、位相スペクトルの差を角度データとしてあつかい、方向の情報を利用した POC 関数の統計的解析法を新たに提案する. その結果、POC 関数の期待値と分散はそれぞれ、位相スペクトルの差の円周分散の1次関数と2次関数として表されることを示す.

## 2 位相限定相関 (POC) 関数

長さ  $N$  の2つの複素信号  $x(n)$  および  $y(n)$  を考える. これらの信号の離散フーリエ変換はそれぞれ、

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} = |X(k)|e^{j\theta_k} \quad (1)$$

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n)W_N^{kn} = |Y(k)|e^{j\phi_k} \quad (2)$$

で与えられる. ここで、 $W_N = \exp(-j2\pi/N)$  は離散フーリエ変換の回転因子であり、 $\theta_k$  および  $\phi_k$  はそれぞれ、信号  $x(n)$  および  $y(n)$  の位相スペクトルである. このとき、2つの信号  $x(n)$  および  $y(n)$  の間の POC 関数  $r(m)$  は、正規化パワースペクトルの離散フーリエ逆変換として、

$$r(m) = \text{IDFT} \left[ \frac{X(k)Y^*(k)}{|X(k)Y(k)|} \right] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\alpha_k} W_N^{-mk} \quad (3)$$

Statistical Analysis of Phase-Only Correlation Functions of Complex Signals Using Directional Statistics, Shunsuke YAMAKI<sup>†</sup>, Masahide ABE<sup>‡</sup>, and Masayuki KAWAMATA<sup>‡</sup>, International Advanced Research and Education Organization, Tohoku University<sup>†</sup>, Department of Electronic Engineering, Graduate School of Engineering, Tohoku University<sup>‡</sup>.

で与えられる. ここで、 $\alpha_k = \theta_k - \phi_k$  は2つの信号の位相スペクトルの差であり、 $e^{j\alpha_k}$  は位相因子とよばれる.

## 3 POC 関数の統計的解析 [2]

本章では、著者らのグループがこれまでに行ってきた POC 関数の統計的解析について紹介する.

まず、位相スペクトルの差  $\alpha_k$  を確率変数と仮定し、位相因子  $e^{j\alpha_k}$  の期待値を

$$A = E[e^{j\alpha_k}] \quad (4)$$

とおく. ここで、位相スペクトルの差  $\alpha_k$  はすべての周波数インデックス  $k$  に関して同一の確率分布をもつものと仮定している. そのため、期待値  $A$  は周波数インデックス  $k$  に依らず一定である. また、期待値  $A$  の値は  $\alpha_k$  の確率密度関数を与えることによって具体的に決まる. また、位相スペクトルの差  $\alpha_k$  は、周波数インデックス  $k$  に関して互いに独立であると仮定する.

以上の仮定のもとで、POC 関数  $r(m)$  の期待値  $E[r(m)]$  および分散  $\text{Var}[r(m)]$  を以下のように導出した.

$$E[r(m)] = A\delta(m) \quad (5)$$

$$\text{Var}[r(m)] = \frac{1}{N}(1 - AA^*) \quad (6)$$

ここで、位相スペクトルの差  $\alpha_k$  の確率密度関数を与えることにより、式 (5) および式 (6) の値が具体的に決まる.

## 4 方向統計学に基づく POC 関数の統計的解析

本章では、方向統計学 [3] という新しい観点に基づく POC 関数の統計的解析法を提案する.

### 4.1 方向統計学の基礎

方向統計学では、角度データを表す統計量を角度確率変数を用いて記述する. そして、角度データを単位円周上の点と対応づけて平均や分散などを定義する. まず、角度確率変数  $\alpha \in [-\pi, \pi)$  に関して、

$$A = E[e^{j\alpha}] \quad (7)$$

を1次三角モーメントという. この1次三角モーメントは、式 (4) で定義した位相因子の期待値に等しい. また、

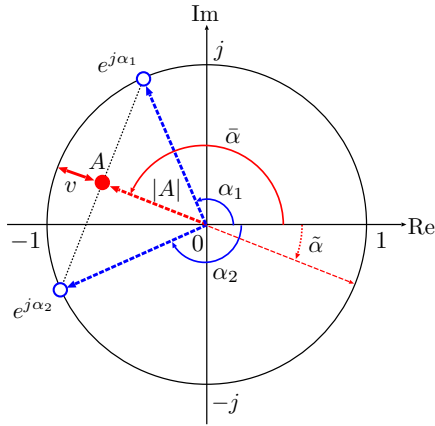


図 1: 方向統計学における平均方向と円周分散の幾何学的解釈. 角度確率変数  $\alpha_1$  および  $\alpha_2$  が与えられたときの 1 次三角モーメント  $A$ , 平均合成ベクトル長  $|A|$ , 平均方向  $\bar{\alpha}$ , 円周分散  $v$ , 算術平均  $\bar{\alpha}$ .

1 次三角モーメント  $A$  の絶対値  $|A|$  を平均合成ベクトル長という. さらに, 平均方向  $\bar{\alpha}$  および円周分散  $v$  が

$$\bar{\alpha} = \arg(A) \quad (-\pi \leq \bar{\alpha} < \pi) \quad (8)$$

$$v = 1 - |A| \quad (0 \leq v \leq 1) \quad (9)$$

と定義される. 平均と分散の定義のしかたが一般の統計学とは異なる点に注意しなくてはならない.

簡単な例として, 2つの角度確率変数  $\alpha_1$  および  $\alpha_2$  の平均方向  $\bar{\alpha}$  と円周分散  $v$  の幾何学的な解釈を図 1 に示す. 平均方向  $\bar{\alpha}$  は, 角度確率変数  $\alpha$  を複素数平面上の単位ベクトル  $e^{j\alpha}$  に対応づけたときの平均的な方向を表しており, 円周分散  $v$  は単位ベクトル  $e^{j\alpha}$  の方向のばらつき具合を表している. この例の場合, 平均方向  $\bar{\alpha}$  が算術平均  $\bar{\alpha} = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$  と異なる点に注意が必要である.

#### 4.2 POC 関数との関連性

POC 関数の統計的解析において, 位相スペクトルの差  $\alpha_k$  は角度データと考えることができる. すると, 従来の POC 関数の統計的解析の考え方が方向統計学の考え方と関連づけられることがわかる. 式 (9) より,  $|A| = 1 - v$  であることを用いると, POC 関数  $r(m)$  の期待値  $E[r(m)]$  および分散  $\text{Var}[r(m)]$  は, 位相スペクトルの差の円周分散  $v$  を用いて以下のように表すことができる.

$$|E[r(m)]| = |A|\delta(m) = (1 - v)\delta(m) \quad (10)$$

$$\text{Var}[r(m)] = \frac{1}{N}(1 - AA^*) = \frac{1}{N}(1 - (1 - v)^2) \quad (11)$$

すなわち, POC 関数  $r(m)$  の期待値  $E[r(m)]$  および分散  $\text{Var}[r(m)]$  はそれぞれ, 円周分散  $v$  の 1 次関数および 2 次関数として非常に単純な形で表せる.

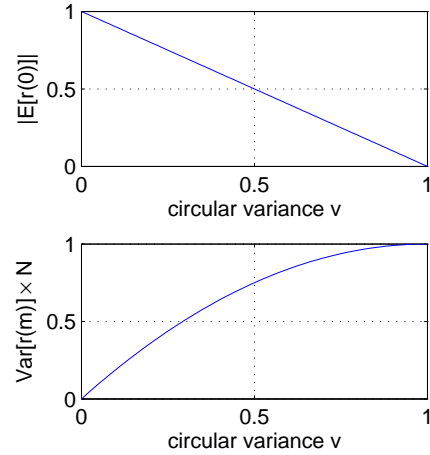


図 2: 位相スペクトルの差の円周分散  $v$  に対する POC 関数  $r(m)$  の期待値  $|E[r(0)]|$  および分散  $\text{Var}[r(m)]$ .

式 (10) および式 (11) より, 位相スペクトルの差の円周分散  $v$  に対する POC 関数の  $r(m)$  の期待値  $|E[r(0)]|$  および分散  $\text{Var}[r(m)]$  のそれぞれの値は図 2 のように図示できる. 任意の円周確率分布に関して, 位相スペクトルの差の円周分散  $v$  が 0 から 1 に増加するにしたがい, 期待値  $|E[r(0)]|$  は 1 から 0 に単調減少し, 分散  $\text{Var}[r(m)]$  は 0 から  $1/N$  に単調増加する.

#### 5 むすび

本論文では, 方向統計学の考えに基づいた POC 関数の新しい統計的解析法を提案した. その結果, POC 関数の期待値と分散はそれぞれ, 2つの信号の位相スペクトルの差の円周分散の 1 次関数と 2 次関数として非常に単純な形で表せることを示した. また, 位相スペクトルの差の円周分散が増加するにしたがい, POC 関数の期待値  $|E[r(0)]|$  は単調減少し, 分散  $\text{Var}[r(m)]$  は単調増加することを理論的に示した.

#### 参考文献

- [1] C. D. Kuglin and D. C. Hines, “The phase correlation image alignment method,” Proc. Int. Conf. Cybernetics and Society, pp. 163–165, 1975.
- [2] S. Yamaki, J. Odagiri, M. Abe and M. Kawamata, “Effects of stochastic phase spectrum differences on phase-only correlation functions —Part I: Statistically constant phase spectrum differences for frequency indices —,” Proc. IEEE Int. Conf. Network Infrastructure and Digital Content, Beijing, China, pp. 360–364, Sept. 2012.
- [3] 清水邦夫, “方向統計学の最近の発展,” 計算機統計学, vol. 19, no. 2, pp. 127–150, 2006.