1B-2

整数計画ソルバーを用いた囲碁における連数最大値探索の効率化

神保 秀司†　　香西 成人‡
岡山大学工学部　　岡山大学工学部

1 はじめに

囲碁のゲームにおいて，連とは碁盤の線に沿って繋っている同じ色の石の集まりである．ただし，ルールによりその中の石の一つが呼吸点と呼ばれる石のない点 (碁盤の線の交点) に隣接していなければならない．通常の 19 路盤の碁盤における連数の最大値が 84 であることが宮代らにより整数計画ソルバーを使って求められている [3]．この結果は，大規模な組合せ問題の解決に対しても整数計画ソルバーが有用であることの好例になっている．なお，連数最大化問題はグラフ理論における $n \times n$ 格子グラフに対する最小支配点集合問題と等価である．

本研究は，宮代らと同様の方針で格子グラフにおける最小支配点集合問題を整数計画ソルバーを使って解くことを試み，20×20 格子グラフの最小支配点数が 92 である証拠を得た．使用した整数計画ソルバーは，SCIP である [1]．

$m \times n$ 格子グラフにおける最小支配点集合の大きさ (支配点数) $\gamma_{m,n}$ は，$8 \leqq m \leqq n$ のとき

$$\gamma_{m,n} \leqq \left\lfloor \frac{(m+2)(n+2)}{5} \right\rfloor - 4 \qquad (1)$$

を満たし，$16 \leqq m \leqq n$ のとき，この上界が $\gamma_{m,n}$ と一致することが予想されている．既に，Alanko らにより $m \leqq n \leqq 29$ を満たすすべての m, n の組について $\gamma_{m,n}$ の値が正確に求められている [2]．彼らの結果は，被支配点の構造に着目した動的計画法に基づいた独自開発のプログラムによるものである．

2 格子グラフの最小支配点数の上界

正方格子状に平面描画した $m \times n$ 格子グラフの点を十字形のペントミノで隙間なく埋め尽したときのペントミノの中央にある点からなる集合 (図 1) を $m \times n$ 格子グラフで切り取って得られる集合に，その集合で支配されていない点を加えたものを $S_{m,n}(k)$ で表す．ただし，$k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ であり，$S_{m,n}(k)$ の点で格子グラフの最上行の最も左にあるものは，最上行の左端の点から k 番目にあるとする．

さらに，$k \neq 1$ のとき格子グラフの左上の隅の近くの外周上の高々3 点について $S_{m,n}(k)$ への所属状況を変更することにより支配点数を 1 つ減らすことができる (図 2)．左上以外の 3 つの隅についても同様の操作を施すことができる．上記の方針で得られる支配点集合の大きさを最小にする k は，$10 \leqq m \leqq n$ のとき $m \bmod 5$ と $n \bmod 5$ の 2 つの値だけから定まる．この k に対する $S_{m,n}(k)$ に 4 隅の近くの支配点数を減らす操作を施して得られる $m \times n$ 格子グラフの支配点集合を $\overline{S}_{m,n}$ で表す．$\overline{S}_{m,n}$ の大きさが不等式 (1) の右辺である．

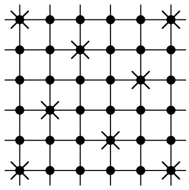

図 1　支配点の配置

A, B は支配されていない点

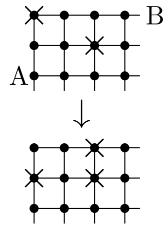

図 2　支配点の修正

3 整数計画問題の改善

対象とする $m \times n$ 格子グラフは，$m = n$ のものだけとする．座標位置が (i, j)，$1 \leqq i \leqq n, 1 \leqq j \leqq n$，である格子グラフの各点に 0/1 変数 $x_{i,j}$ を対応させる．目的関数と最適化の方向は，

$$\text{minimize} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{i,j}$$

である．基本的な制約条件は，各 (i, j) に対する

$$x_{i,j} + x_{i-1,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j-1} + x_{i,j+1} \geqq 1 \qquad (2)$$

である．ただし，外周上の点については，宮代ら [3] と同様にグラフ外の仮想的な点を考えて対処する．ソル

Improvement on searching the maximum ren count in Go using an IP solver

†Shuji JIMBO, Faculty of Engineering, Okayama University

‡Naruhito KOZAI, Faculty of Engineering, Okayama University

バーの動作の効率化における宮代ら [3] との違いは，次に述べる対称性の除去の試みである．

図 3 のように格子グラフの中心から外周に向かって対角線方向 (n が偶数のとき) あるいは上下左右方向 (n が奇数のとき) に並んだ点の列 4 つを中心側が最上位桁の 2 進数で表された非負整数と見なし，時計回りの順に a, b, c, d で表す．そして，制約式

$$a \geqq b, \quad a \geqq c, \quad b \geqq d$$

を追加する．さらに，中心付近にある a, b, c, d の最上位桁に対応する点の間の大小関係に基づいて制約式 (2) のいくつかを簡略化することができる．例えば，n が奇数のとき格子グラフの中心の点に対応する (2) の制約式は不要である．

このようにして構成した 19×19 格子グラフの最小支配点集合を求める整数計画問題を一般的なパソコンを使って SCIP に解かせたところ，約 2 日半程度で最適解が得られた．宮代ら [3] は，最適解を得るのに約 40 日程度費した．ただし，今回施した整数計画問題の改良を加えなかった場合でも我々の実験環境では，計算時間が約 1/4 程度に短縮されている．

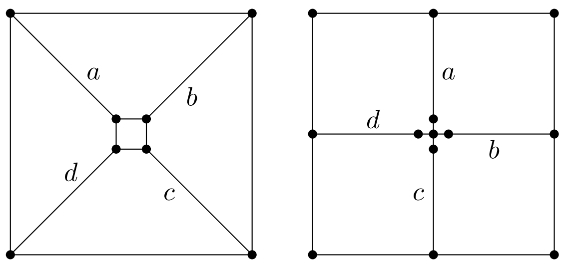

図 3　4 つの直線上に並んだ点の列

4　$\gamma_{20,20} > 91$ の検証

既に述べたように $16 \leqq m \leqq n$ に対する $\gamma_{m,n}$ の上界 (1) とこの上界を達成する支配点集合の構成方法が与えられているので，20×20 格子グラフの最小支配点集合問題を解くには，上界 (1) よりも少ない点からなる支配点集合が存在しないことを示せば十分である．

20×20 格子グラフ A を 2 つの 20×11 格子グラフ B で覆うことを考える．このとき A の中央にある B の端に並んだ 20 個の点 (S) にある支配点の個数を z で，その内側に並んだ 20 個の点 (T) にある支配点の個数を y で，B のうち S に属さない部分 (U) にある支配点の個数を x で表す．さらに，B の各点に 0/1 変数を対応させる．

以下，A の最小支配点数が 91 以下であると仮定する．U をすべて支配するという制約条件の下での x の最小値は 43 であるが，$x = 43$ という制約条件の下での z の最小値が 14 であり，$x = 48$ という制約条件の下での y の最大値が 9 であることから $x = 43$ は有り得ないことが示される．同様に，$x = 44$ の制約条件の下での y の最大値が 2，z の最小値が 9 であり，$y \geqq 9$, $z \leqq 2$ という制約条件の下での x の最小値が 48 であることから，$x = 44$ も有り得ないことが示される．従って，一方の B について $x = 45$ が，もう一方の B について $x = 46$ が成り立つようにできるはずである．これらの推論は，整数計画問題を生成する簡単なプログラムを C 言語で作成し，それを使って手作業で進めた．

さらに推論を進め，$x = 45$ の方の B について $y \in \{3, 4\}$ かつ $z \in \{5, 6\}$ が必要であることが導かれ，従って，$x = 46$ の方の B について $y \in \{5, 6\}$ かつ $z \in \{3, 4\}$ が必要であることが導かれた．従って，$x = 45, y \in \{3, 4\}, z \in \{5, 6\}$ の 4 通りの制約条件，および，$x = 46, y \in \{5, 6\}, z \in \{3, 4\}$ の 4 通りの制約条件の合計 8 通りの制約条件について全実行可能解を求めることができれば，その中から 2 つの解を選んで A の支配点集合が作れるか否かを判定することにより $\gamma_{20,20} = 91$ であるか $\gamma_{20,20} = 92$ であるかが判明する．

実際に上記の全実行可能解を SCIP を使って求めたところ，$\gamma_{19,19}$ を約 2 日半で計算したときよりも悪い計算機環境の下で約 13 時間で終了した．このとき，制約条件毎の実行可能解の総数は，最小が 63，最大が 58701 であり，全実行可能解の総数は，84111 であった．なお，解の数を減らすために，各整数計画問題に対称性の除去のための制約式を加えるなどの操作を施している．全実行可能解が得られた後の処理については，当日の報告とする．

参考文献

[1] T. Achterberg. Scip: solving constraint integer programs. *Mathematical Programming Computation*, Vol. 1, No. 1, pp. 1–41, 2009.

[2] S. Alanko, S. Crevals, A. Isopoussu, and V. Pettersson. Computing the domination number of grid graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, Vol. 18, No. P141, p. 1, 2011.

[3] 宮代隆平, 矢野洋平, 村松正和. 囲碁における連数の最大値について. 情報処理学会論文誌, Vol. 48, No. 11, pp. 3463–3469, 2007.