2Q-5

立方体表面上のn-クイーン問題およびn-ルーク問題

藤原美早紀 † 山村明弘 ‡

† 秋田大学工学資源学部 ‡ 秋田大学院工学資源学研究科

1 はじめに

n 個のクイーンを $n \times n$ のチェス盤上に互いに攻撃しないように配置した解やその解の個数を求める問題を n-クイーン問題 [1]，クイーンの代わりにルークを使用した問題を n-ルーク問題という．我々は平面チェス盤上の n-クイーン問題および n-ルーク問題を立方体表面上に拡張した立方体上の n-クイーン問題と n-ルーク問題を提案した．本報告では，正 8 面体群の立方体の作用で移りあう解を同一視し，本質的に異なる解の個数を計算した結果とその手法について紹介する．

2 n-クイーン問題の立方体上への拡張

2.1 立方体上のチェス盤

このパズルにおけるチェス盤は $n \times n$ の平面チェス盤を立方体の 6 つの面に配したものである．つまり立方体の表面が駒を配置するチェス盤であり，そこには合計で $6n^2$ 個のマス目が存在する．

2.2 立方体上の駒の動き

平面チェス盤上でのルークの動きは縦横方向，クイーンの動きは縦横斜め方向である．これを立方体上に拡張すると駒の動きは複数考えられるが，本研究では駒の動きを**図 1** と**図 2** のように定めた．平面チェス盤上と同様にクイーンの動きはルークの動きも兼ねている．

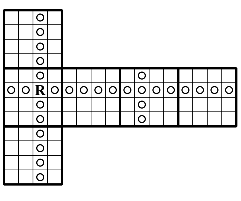

図 1 ルークの動き

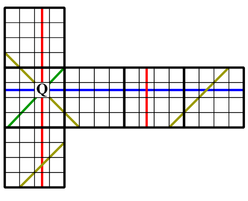

図 2 クイーンの動き

---

n-Queens and n-Rooks Problem on Cubes

Misaki FUJIWARA† and Akihiro YAMAMURA‡

†Faculty of Engineering and Resource Science, Akita University

‡Graduate School of Engineering and Resource Science, Akita University

2.3 配置する駒の個数

我々が提案した立方体上の n-クイーン問題と n-ルーク問題では立方体上に配置できる最大個数の駒を置いた解を求めるものとする．一辺が n マスの立方体上にクイーン（ルーク）を配置するとき，互いに攻撃せずに置くことのできる最大個数は明らかではない．

本研究では互いに攻撃せずに置くことのできるルークの数は $n = 2k + r$（k は自然数，r は 0 か 1）のとき $3k + r$ であることを理論的に導出した．

クイーンの動きはルークの動きも兼ねているため，配置できるクイーンの最大個数は $3k + r$ 以下であることは明らかである．

3 正 8 面体群の作用

3.1 本質的に異なる解

立方体上にクイーン（ルーク）を配置した解は立方体を回転させることで別の解となるが，このような解は本質的には同じ解であると考えられる．我々は立方体の回転により移り合う解を同一視し，本質的に異なる解の個数を求めた．

立方体をそれ自身に重ね合わせる変換は正 8 面体群をなす．また立方体の 4 つの対角線（立方体の頂点を結んだ対角線をそれぞれ a, b, c, d と名づける）の置換を引き起こし，4 次の対称群 S_4 と同型である．

正 8 面体群の作用と Cauthy-Frobenius の定理から，本質的に異なる解の個数は，

$$\frac{1}{24}(\psi(e) + 6\psi((ab)) + 3\psi((ab)(cd)) \\ +8\psi((abc)) + 6\psi((abcd)))$$

で求めることができる．$\psi(e)$ は本質的に同じ解を重複して数えた解の個数，$\psi((ab))$ は対角線を置換する変換 (ab) により不変である解の個数で，以下も同様である．つまり，本質的に異なる解の個数は回転によって不変である解の個数を数えることで求めることができる．

3.2 解の特性による計算の工夫

ただし，クイーンとルークの動きと立方体の各面に置かれる駒の数の特性から，置換によって不変であるか検査する必要がない（既に 0 であるとわかっている）ψ の値も存在する．したがって，立

方体の一辺の長さ n と配置した駒の個数によって，下記の (1) から (3) を使い分け，解の個数を計算する．

(1) n が奇数のとき，$\frac{1}{24}(\psi(e)+6\psi((ab)))$

(2) 置かれる駒の個数が奇数であるとき，$\frac{1}{24}(\psi(e)+8\psi((abc)))$

(3) n が奇数でありかつ置かれる駒の個数が奇数であるとき，$\frac{1}{24}\psi(e)$

4 計算機実験方法

4.1 n-ルーク問題の解の探索方法

立方体上のあるマス目 K に対し，向かい合った面にあり K に置いたルークから縦と横の両方から攻撃されるマス目を対点 $\bar{K}$ とする．すると，立方体上の n-ルーク問題の解は，任意のルークをこの対点に移動させた場合も解となることがわかる．

この特性により，n-ルーク問題の解を探索するとき，相対していない 3 つの面のみにルークを配置した解を求め，その解から派生させて全ての解を求めるという手法を用いることができる．

このルークの配置を限定した解の探索にはバックトラック法を用いた．解は立方体の展開図の各列における駒の位置をあらわすリストで表現している．このリストに要素（駒の位置）を追加／削除を繰り返し，解を探索し，全ての解を発見する．

4.2 計算アルゴリズム

n-ルーク問題の本質的に異なる解の個数を求めるには以下の手続きをおこなう．

手続き 1 解のリストに要素（駒の位置）の追加／削除を繰り返し，ルークの位置を 3 つの面のみに制限した解 s を発見する．

手続き 2 解 s から任意のルークを対点に移動させ，別解 s' を派生させる．

手続き 3 変換 (ab) および (abc) により s' が不変であるか検査する．

以上の方法により計算すべき ψ の値を求める．手続き 2，3 は対点に移動させて派生させることのできる解の個数だけ繰り返し，全解探索が終わるまで手続き 1 から 3 を繰り返す．

n-クイーン問題の本質的に異なる解の個数を求めるには，n-ルーク問題の計算の過程を利用する．手続き 2 で別解 s' を派生させた後，この解が n-クイーン問題の解となっているかを検査する．s' が n-クイーン問題の解となっている場合には手続き 3 をおこなう．これにより n-ルーク問題と同様に n-クイーン問題の本質的に異なる解の個数を求めることができる．

5 計算機実験結果

表 1 と **表 2** に計算機実験により得られた ψ の値と本質的に異なる解の個数を示す．

表 1 立方体上の n-ルーク問題の解の個数

n	駒の数	$\psi(e)$	$\psi((ab))$	$\psi((abc))$	解の個数
1	1	6	0	0	1
2	3	64	0	4	4
3	4	5184	24	0	222
4	6	110592	384	48	4720
5	7	27648000	0	0	1152000
6	9	884736000	0	960	36864320

表 2 立方体上の n-クイーン問題の解の個数

n	駒の数	$\psi((e))$	$\psi((ab))$	$\psi((abc))$	解の個数
1	1	6	0	0	1
2	3	16	0	4	2
3	4	816	8	0	36
4	6	1536	40	0	74
5	7	279648	0	0	11652
6	9	679200	0	0	28300
7	10	252520080	3736	0	10522604
8	12	719751840	10832	0	29992368

立方体上の 2-クイーン問題と 3-クイーン問題の解の一部を **図 3** と **図 4** に示す．

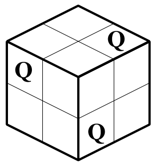

図 3 2-クイーン問題

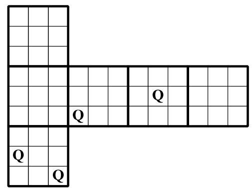

図 4 3-クイーン問題

6 まとめ

計算機実験で立方体上の n-クイーン問題の本質的に異なる解の個数を $n \le 8$ まで，立方体上の n-ルーク問題の本質的に異なる解の個数を $n \le 6$ まで求めた．これらの問題は n の拡大にともない，解の個数が大きく増えていることが実験結果から明らかである．したがって今後の課題はさらに大きな n について解の個数を求めるため，効率のよい探索方法を見つけることである．また，本報告では不明である配置できるクイーンの最大個数を理論的に導出することも課題の一つである．

参考文献

[1] Rivin, I., Vardi, I. and Zimmerman, P.: The n-queens problem, American Mathematical Monthly 101 (7) 629-639, (1994).