

単純セルオートマトンルール 110 における周期的背景の除去

蜷川 繁

金沢工業大学 情報学部 情報工学科

〒 924-0838 石川県白山市八束穂 3-1

e-mail: ninagawa@infor.kanazawa-it.ac.jp

1 はじめに

単純セルオートマトンのルール 110 は計算万能である [1] ことが知られているが、そのいっぽうで $1/f$ ゆらぎを示す [2] ことから計算万能性と $1/f$ ゆらぎの間には何らかの関連性があるのではないかと予想される。しかし、ルール 110 では初期様相によってはパワースペクトルの形が $1/f$ 型のスペクトルとは言い難いことがある。その原因と考えられるのがルール 110 に固有の周期的背景とよばれる周期 7 のパターンの存在が考えられる。本研究ではこの周期的背景を除去した場合のパワースペクトルを調べる。

2 ルール 110 における $1/f$ ゆらぎ

N 個のセルからなる 1 次元 CA において、 i 番目のセルの t ステップ目の状態を $x_i(t)$ とする。 $t = 0, 1, \dots, T-1$ の T 個の時系列データに対して次式で定義されるフーリエ変換を施す。

$$\hat{x}_i(f) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} x_i(t) \exp(-i \frac{2\pi t f}{T}).$$

これを次の式のように全セルにわたって総和をとり、パワー $S(f)$ とする。

$$S(f) = \sum_{i=1}^N |\hat{x}_i(f)|^2.$$

こうして得られたパワースペクトルに対して、最小自乗法を用いて $\log S_f = \alpha + \beta \log f$ と近似し、次式に示す残差平方和 σ^2 を求める（ここでは $N=100$ とする）。

$$\sigma^2 = \sum_{f=1}^N \frac{(S_f - S(f))^2}{N}$$

独立な ECA は全部で 88 個あるが、このなかでルール 110 がもっとも長いステップにわたって $1/f$ ゆらぎ

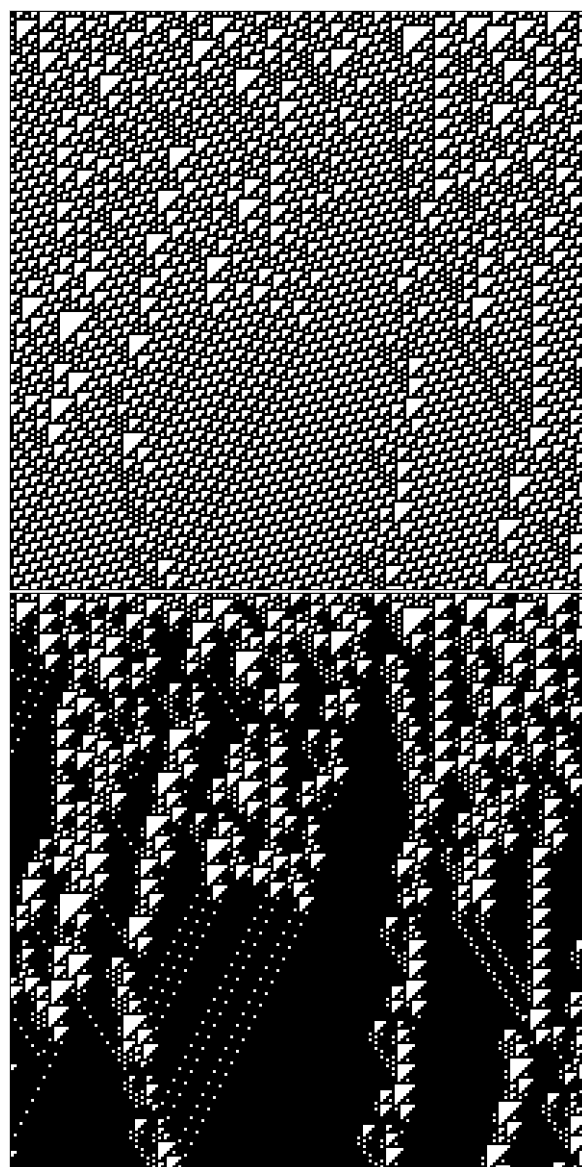


図 1: セル数 200 のランダム初期様相のルール 110 の時空間パターン（上）と周期的背景除去後のパターン（下）。

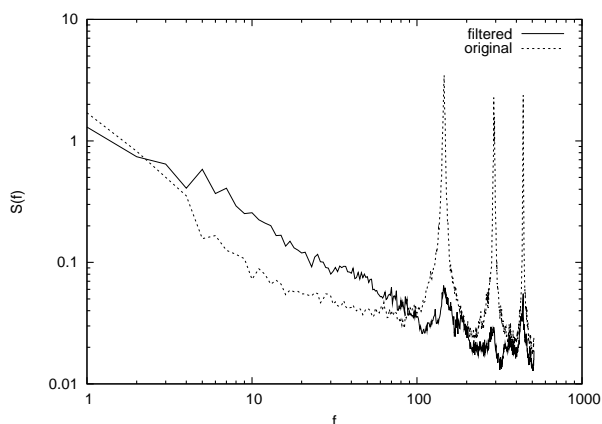


図 2: セル数 500 のランダム初期様相のルール 110 の周期的背景除去後 (実線) と前 (点線) のパワースペクトル. 除去後は $\beta = -0.79$, $\sigma^2 = 0.012$, 除去前は $\beta = -0.62$, $\sigma^2 = 0.077$.

1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	
1	1	1		

図 3: ルール 110 の時空間パターンにおいて上記のパターンの状態 0 を状態 1 にする.

を示す [2]. セル数 500 のランダム初期様相のルール 110 のパワースペクトルを図 2 に点線で示す. $f = 1$ から 100 の周波数域においてパワースペクトルの傾きは $\beta = -0.62$, 残差平方和は $\sigma^2 = 0.077$ となり, 初期様相によっては, この例のようにパワースペクトルが, べき乗からずれる場合もある.

3 周期的背景の除去

ルール 110 のパワースペクトルがべき乗からずれる原因は周期 7 の周期的背景にあると推測できる. そこで, ルール 110 の時空間パターンから周期的背景を除去する. 除去の方法としては時空間パターンの中から図 3 に合致するパターンがあった場合, 状態が 0 のセルを状態 1 にする. こうして得られた時空間パターンを図 1 (下) に示す. また, パワースペクトルを図 2 の実線に示す. $\beta = -0.79$, $\sigma^2 = 0.012$ となり, パワースペクトルが $1/f$ ゆらぎに近づいている. また, 100 通

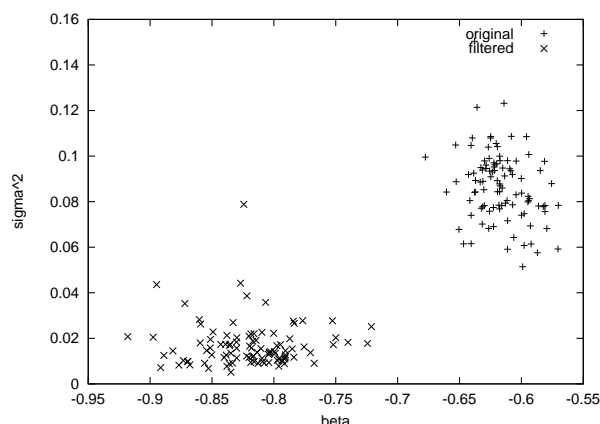


図 4: 100 個のパワースペクトルの傾き β と残差平方和 σ^2 の分布. + は周期背景除去前, x は除去後のものを表す.

りのランダム初期様相に関して, 同様に求めた傾き β と残差平方和 σ^2 の分布を図 4 に示す. 周期的背景除去前の β と σ^2 の平均値は $\langle \beta \rangle = -0.62$, $\langle \sigma^2 \rangle = 0.087$ だが, 除去後は $\langle \beta \rangle = -0.82$, $\langle \sigma^2 \rangle = 0.017$ となる.

4 おわりに

ルール 110 において周期的背景を除去することにより, パワースペクトルが $1/f$ ゆらぎに近くなることが示された. 周期的背景は計算機能には本質的には寄与していないと考えられるので, この結果は, 前述の計算万能性と $1/f$ ゆらぎの関係を補強しているといえる. 今後は, 別の周期的背景を除去するアルゴリズムを使った場合でも同様の結果がえられるかどうか調べる予定である.

参考文献

- [1] M. Cook: Universality in Elementary Cellular Automata. Complex Systems **15** (2004) 1–40.
- [2] S. Ninagawa: Power Spectral Analysis of Elementary Cellular Automata. Complex Systems **17** (2008) 399–411.
- [3] Ninagawa, S., Yoneda, M., Hirose, S.: $1/f$ Fluctuation in the "Game of Life". Physica D **118** (1998) 49–52.