2D-5

初等力学の知識構造について

On a Knowledge Structure for the Elementary Mechanics

中村勝則 *　　房岡璋 **
* 平安女学院大学　** 立命館大学

概 要

本研究では，従来数式で記述されている初等力学の教科書を，プログラミング言語で書き換えることを目標としている．これが可能であれば，力学の諸概念を柔軟に表現できる上，数式では扱えないダイナミクスを計算により取り扱うことができる．しかし，数式の代わりにプログラミング言語を用いるためには，知識体系の整理が必要であり，ここでは，ニュートン力学に対する公理系と推論の規則を Prolog 言語で与える．

1　はじめに

物理現象をアルゴリズムにより表現することは，もとより広く行われている．しかし，それはほとんど数式モデルに基づき計算を行うということであって，プログラミング言語を数式の代替にすることではない．数少ない例として，G.J.Sussman らは，Scheme 言語を用いて解析力学の体系を記述し，これを用いてＭＩＴで力学の講義を行っている [1]．本稿では，初等力学 (質点系のニュートン力学) を対象にその公理系を Prolog を用いて表現することを試みる．

周知のように，質点系の力学の法則は I.Newton の「プリンピキア」で与えられたとされているが，現在の運動方程式による形は Newton から 100 年後，L.Euler によって，微積分学の確立とともに与えられたようである [2]．しかしながら，初等力学では，力の因果的定義など，微分方程式に還元されることにより隠蔽されてしまった直観的知識が多く含まれるので，Euler の定式化は知識の体系としては不十分であると考えられる．単に質点の軌道を計算するだけでなく，その幾何学的性質や保存量などに対する知識ベースの構築を視野に入れると，質点の力学に対する論理的な知識構造をまず用意することが必要である．

2　力学の公理系

力学の公理系は，古くから多くの研究が行われており，P.Suppes による質点の力学に関する公理系が代表的なものである．[3]．これらは，L.Euler の微分方程式による体系を論理式により再構築したものに過ぎず，衝撃力が扱えないこと，観測に対する考察が全くなされていないことなど，多くの点で不十分である．他方，運動のプロセスを計算過程として記述する立場からは，差分スキーマを用いた離散的な力学系として 公理化を行うことが考えられる [4]．この場合，たとえばエネルギーなどの保存量が素朴な差分スキーマでは不変にはならないといった問題がある．本研究では，観測によっては区別されない非標準の量 (無限小) を導入し，これに基づいて離散化された力学の公理系を与える．

2.1　観測命題

一般に観測命題は集合族 $O = \{A \subseteq \mathbb{R}\}$ を決めて，物理量 x に対し，$x \in A$ の形で与えられる．O の性質によって，対応する論理 (例えば，第 1 階述語論理であるか否か) が決まる．ここでは，これと異なり，物理量 x, y に対し述語 $x \approx y$ を導入する．$x \approx y$ は x, y が観測によっては区別されないとき真である命題である．従って，$f(x)$ を任意の標準的な物理プロセス (観測装置) としたとき，$x \approx y \supset f(x) \approx f(y)$ が成り立つ．従って，$x \approx y$ ならば $x - y \approx 0$, すなわち，$x - y$ は実質的には無限小である [5]．

2.2　Kinematics の公理系

P を質点の集合，$pos(p, a; t), vel(p, b; t)$ をそれぞれ質点 p が時刻 t に於いて a の位置にあり，速度が b であることを示す述語とする．a, b は 3 次元ベクトルである．すなわち，時刻 t における質点 p の位置を $(x(t)$ とするとき，$pos(p, a; t) \equiv x(t) \approx a$.

また，$inf(p, q, x; t), exf(p, x; t)$ を時刻 t に質点 q から p に内力 x が働いていること，および質点 p に外力 x が働いていることを表す述語とする．さらに，τ を単位時間を表す定数とする．普通は $\tau \approx 0$ である．以下では，言語 $\mathcal{L}(P, \tau; pos, vel, inf, exf, \approx, =)$ を用いる．但し，等号 $=$ はその両辺が相互に常に置き換え可能であることを意味しており，定義に用いる．
質点系の運動学の公理系を言語 $\mathcal{L}$ において以下のように与える．
K1: $pos(p, x; t)$:- $pos(p, y; t - \tau), vel(p, v; t), x = y + v\tau$,
K2: $pos(p, x; t - \tau)$:- $pos(p, y; t), vel(p, v; t), x = y - v\tau$.

2.3　Dynamics の公理系

Dynamics の公理として Newton の第 2, 第 3 法則を与える．
D1: $inf(q, p, -f; t)$:- $inf(p, q, f; t)$,

D2: $x \times f = -y \times f$

:- $assert(pos(p, x; t), pos(q, y; t), inf(p, q, f; t))$,

ここで，$\times$ は外積であり，D2 は作用，反作用の力が，p, q を結ぶ線上で働くことを示している．

D3. $vel(p, x; t)$:- $vel(p, y; t-\tau), tf(p, f; t)$,

$$m_p(x-y) = f\tau.$$

ここで $tf(p, f; t)$ は p に働く力の総和である，すなわち，

$tf(p, f; t)$:- $inf(p, q_i, f_i; t), exf(p, g; t)$,

$$f = f_1 + f_2 + \cdots + g.$$

質点の位置については連続性

$\tau \approx 0 \supset x(t) \approx x(t-\tau)$

を仮定する．速度は必ずしも連続ではない．この点で Suppe の公理系より一般な体系である

2.4 運動量保存則

すべての $p \in P$ について，$exf(p, 0; t)$ がなりたつシステムは孤立系と呼ばれる．孤立系では，運動量は保存される．例えば，$P = \{1, 2\}$ とすると，

$vel(1, u_1; t)$:- $vel(1, v_1; t-\tau), m_1u_1 = m_1v_1 + f_{12}\tau$

$vel(2, u_2; t)$:- $vel(2, v_2; t-\tau), m_2u_2 = m_2v_2 + f_{21}\tau$

作用反作用の法則より，$f_{12} = -f_{21}$ であるから，

$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$.

2.5 trajectory

質点の軌道は，各時点における位置座標のリストである．すなわち，

$traj(p, [x]; t)$:- $pos(p, x; t_0), t \approx t_0$,

$traj(p, [x|y]; t)$:- $pos(p, x; t), traj(p, y; t-\tau)$.

3 例

3.1 自由落下

１個の質点の自由落下運動を考える．すなわち $P = \{1\}$. Fact は外力 $extf(1, -g; t)$ および初期条件 $pos(1, h; t_0), vel(1, 0; t_0)$ である．また，運動方程式は，

$vel(1, u; t)$:- $vel(1, v; t-\tau), u = v - g\tau$;

で与えられる．質点 1 のエネルギー関数 $ene(p, e; t)$ を

$ene(p, e; t)$:- $vel(p, u; t), pos(p, x; t), pos(p, y; t-\tau)$,

$$e = mu^2 + g(x+y)$$

により定義する．エネルギーの保存は時間対称性に依存するので，$e; t$ を x と y の対称式とすることにより，差分方程式の保存量になる [6]. 実際，$pos(1, z; t-2\tau)$ とすると，$h(t) - h(t-\tau) = m(u^2 - v^2) + g(x-z)$

$= (x-z)(mu - mv + g\tau)/\tau = 0$

従って，問い合わせ ?- $pos(1, 0; t_0), pos(1, v; t)$ に対して即座に $v \approx \sqrt{2gh}$ が得られる．

3.2 面積速度一定の定理

定点 S に向かう一定の大きさの求心力が働く場で，質点が描く軌跡（図 1）を考える．一定の単位時間 τ の間隔で移動する質点の軌跡を $A \to B \to C \to D$ とする．また求心力は各点で離散的に変化するものとし．簡単のため質量は $m = 1$ とする．点 B における S に向かう求心力を $\vec{F}$，A から B への移動の速度を $\vec{v}$，B から C への移動の速度を $\vec{v}_1$ とすると，$\vec{v}_1 = \vec{F}\tau + \vec{v}$ から $\overrightarrow{BC} = (\vec{F}\tau + \vec{v})\tau$ となる．これらから，

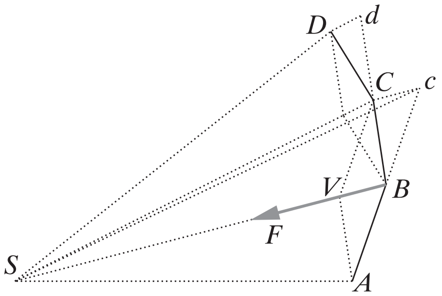

図 1: 面積定理

$\triangle SAB = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{SA} \times (\overrightarrow{SA} + \vec{v}\tau)\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{SA} \times \vec{v}\tau\right|$,

$\triangle SBC = \frac{1}{2}\left|(\overrightarrow{SA} + \vec{v}\tau) \times (\overrightarrow{SA} + \vec{v}\tau + (\vec{F}\tau + \vec{v})\tau)\right|$

$= \frac{1}{2}\left|(\overrightarrow{SA} + \vec{v}\tau) \times (\vec{F}\tau + \vec{v})\tau\right| = \frac{1}{2}\left|(\overrightarrow{SA} + \vec{v}\tau) \times \vec{v}\tau\right|$

$= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{SA} \times \vec{v}\tau\right|$ $\quad \therefore \triangle SAB = \triangle SBC$ となる．

同様の方法で $\triangle SAB = \triangle SBC = \triangle SCD = \cdots$ となることがいえるので，S を頂点とする三角形の面積は一定となることがわかる．

質点 $P = \{1\}$ があるとし，S を原点にとる．時刻 t_0 で質点は点 A にある（下記）とする．

:- $assert(pos(1, A; t_0), vel(1, v; t_0))$.

このとき問い合わせ

?- $pos(1, A; t_0), vel(1, v; t_0), exf(1, F; t_0 + \tau)$,

$S_1 = \frac{1}{2} * |A \times (A + v * \tau)|$,

$S_2 = \frac{1}{2} * |(A + V * \tau) \times (A + V * \tau + (F * \tau + V) * \tau)|$,

$S_1 = S_2$.

によりただちに面積速度が一定であることが証明できる．

参考文献

[1] Gerald Jay Sussman, Jack Wisdom, “Structure and Interpretation of Classical Mechanics”, The MIT Press, 2011

[2] 山本義隆, “古典力学の形成- ニュートンからラグランジュへ”, 日本評論社, 1997

[3] J.C.C.McKinsey, A.C.Suger, Patrick Suppes, “Axiomatic Foundations of Classical Particle Mechanics”, Journal of Rational Mechanics and Analysis, Vol.2, No.2, 1953

[4] G.Jaroszkiewicz, K. Norton, “Principles of Discrete Time Mechanics: I. Particle Systems Journal of Physics A: Math. Gen.”, Vol.30, No.9, 1997

[5] F. Diener, N.Diener, “Nonstandard Analysis in Practice”, Springer, 1951

[6] 広田良吾, 高橋大輔, “差分と超離散”, 共立出版, 2003