

## 任意の確率密度関数と周波数スペクトルをもつ不規則信号 の発生とピーク値分布評価式検証への応用\*

福島健太<sup>†</sup>, 佐藤圭<sup>†</sup>, 岩木祐哉<sup>†</sup>, 南原英生<sup>‡</sup>

<sup>†</sup>岡山理科大学大学院 工学研究科 <sup>‡</sup>岡山理科大学 工学部

### 1. 緒言

自然界の様々な分野で生じる不規則信号についてはその重要性から多くの研究がなされてきた。とりわけ、ピーク値分布の統計的評価は騒音・振動や海洋波をはじめ多くの分野に応用されている<sup>1)</sup>。これらの不規則信号の研究にはシミュレーションが不可欠であり、任意の確率分布形状と周波数スペクトルをもつ不規則信号が必要となる。

一般に、任意の周波数スペクトルをもつ不規則信号は、三角級数モデルを用いることによって発生が可能であることが知られている<sup>2)</sup>。一方、任意の確率分布をもつ不規則信号はエルミート多項式を用いることによってその確率密度関数の表現が可能であることが知られている。このような見地から、三角級数モデルとエルミート多項式を組み合わせることで、シミュレーション用の不規則信号を発生するプログラムの開発を行ってきた<sup>3)</sup>。

本報告では、エルミート多項式の展開項数を設定しておくことで複雑な積分式を分解し、分布形状に関する設定条件に関わらず共通な計算を予め計算し、保存しておいたファイルから読むことで信号発生に必要な時間の短縮を試みる。また、重み関数に基づく新たなピーク値分布評価式を提案し、本手法を用いて様々な不規則信号を発生し、提案法のピーク値分布評価式の有効性を検証し、併せて従来法との比較・検討を行う。

### 2. ガウス形不規則信号の発生

ガウス形不規則信号  $x(t)$  は次に示す三角級数モデルで発生させることができる。

$$x(t) = \sum_{k=1}^N a_k \sin(\omega_k t + \phi_k) \quad (1)$$

ここで、 $a_k$  は平均値 0、標準偏差  $\sigma_k$  のガウス乱数 ( $k = 1, 2, \dots, N$  に対して互いに独立)、 $\phi_k$  は 0 から  $2\pi$  の範囲で一様な乱数 ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) である。また、 $\sigma_k$  は以下の式で与えられる。

$$\sigma_k^2 = 4S_x(\omega_k)\Delta\omega$$

ただし、 $S_x$  はパワースペクトル密度関数を表し、 $\omega_k$  は、 $S_x$  の区間上限値  $\omega_u$  から下限値  $\omega_l$  までを  $N$  等分し、

$$\Delta\omega = (\omega_u - \omega_l)/N, \quad \omega_k = \omega_l + (k - 0.5)\Delta\omega$$

として与えられる。

### 3. 任意の確率密度関数をもつ信号の発生

平均値  $\mu = 0$ 、標準偏差  $\sigma = 1$  に正規化した不規則信号  $x(t)$  が非ガウス形の任意分布を示すとき、 $x(t)$  の確率密度関数  $p(x)$  はエルミート多項式  $H_n(x)$  を導入し、標準正規分布を  $N_0(x)$ 、展開係数を  $A_n$  とすれば次式のように直交展開表現される。

$$p(x) = N_0(x)F_0(x) \quad (2)$$

\*Generating a random signal with an arbitrary frequency spectrum and probability density function, and its application for the verification of the theoretical peak value distribution. <sup>†</sup>Kenta Fukushima and <sup>‡</sup>Kei Satou and <sup>†</sup>Yuya Iwaki and <sup>‡</sup>Hideo Minamihara

<sup>†</sup>Graduate School of Engineering, Okayama University of Science.

<sup>‡</sup>Faculty of Engineering, Okayama University of Science.

ただし、 $F_0(x)$  および非ガウス性を反映する展開係数  $A_n$  はそれぞれ、

$$F_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n(x) \\ A_n \equiv \frac{1}{n!} \langle H_n(x) \rangle$$

で定義され、 $\langle \rangle$  は集合平均を表すものとする。

一方、一般に、確率変数  $\eta$  が確率密度関数  $f(y)$  をもつとき、(3) 式で定義される  $\varepsilon$  は区間  $[0, 1]$  の範囲で一様分布する<sup>4)</sup>。

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\eta} f(y)dy \quad (3)$$

また、逆に一樣乱数  $\{\varepsilon_i\}$  を発生し、(4) 式を満たす数列  $\{\eta_i\}$  を求めると、 $\{\eta_i\}$  は与えられた確率密度関数  $f(y)$  をもつ乱数列となることが知られている。

$$\int_{-\infty}^{\eta_i} f(y)dy = \varepsilon_i \quad (4)$$

ここで、(4) 式の確率密度関数  $f(y)$  として (2) 式の展開表現を採用するとき、(4) 式によって得た一樣乱数  $\{\varepsilon_i\}$  から、次式を満たす数列  $\{\eta_i\}$  を求めることができるならば、任意の確率分布を持つ信号の発生が可能となる。

$$\int_{-\infty}^{\eta_i} N_0(y)F_0(y)dy = \varepsilon_i \quad (5)$$

ここで、(5) 式に  $\{\eta_i\}$  を与え、結果  $\{\varepsilon_i\}$  を得ることは可能であるが、 $\{\varepsilon_i\}$  を与え、 $\{\eta_i\}$  を得ることは一般に困難である。そこで、あらかじめ (5) 式に  $\{\eta_i\}$  を与えたときの計算結果の表を作成し、一樣乱数  $\{\varepsilon_i\}$  に対応する  $\{\eta_i\}$  に最も近い値をこの表から見つけるという方法を採用する。ただし、(5) 式の左辺の上限を  $A_8$  までとし、エルミート多項式を展開し解析的に計算可能な定積分をあらかじめ求めた次式を用いた。

$$\int_{-\infty}^x N_0(y)dy - N_0(x) \\ \times \{A_3(x^2 - 1) + A_4(x^3 - 3x) \\ + \dots + A_8(x^7 - 21x^5 + 105x^3 - 105x)\} \quad (6)$$

ここで、(6) 式のガウス分布の積分計算は毎回共通であり、あらかじめ計算し保存しておいたファイルから読み込んでおく。そして、展開係数の値によって変化する (6) 式の第 2 項のみを計算し、読み込んだ値と加算することで計算時間の短縮を実現する。

### 4. 重み関数を用いた広帯域非ガウス形信号に対するピーク値分布評価式の導出

一般にガウス過程におけるピーク値分布評価式は次式で評価されることが知られている<sup>5)</sup>。

$$p_G(x; \varepsilon_0) = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\varepsilon_0^2} \\ + \sqrt{1 - \varepsilon_0^2} x e^{-x^2/2\varepsilon_0^2} Q\left(-x\sqrt{1 - \varepsilon_0^2}/\varepsilon_0\right) \quad (7)$$

ここで  $Q(\alpha)$  は次式で定義される。

$$Q(\alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} N_0(y)dy \quad (8)$$

また、周波数帯域パラメータ  $\varepsilon_0$  は、次式で定義される<sup>6)</sup>。

$$\varepsilon_0 = \sqrt{1 - (N(0)/M)^2} \quad (9)$$

ここで、 $N(0)$  は正方向にレベル 0 と交差する回数、 $M$  はピークの総数である。

いま、上式を以下のように書き換える。

$$p_G(x; \varepsilon_0) = \varepsilon_0 P\left(\frac{x}{\varepsilon_0}\right) + \sqrt{1 - \varepsilon_0^2} \times Q\left(-x \frac{\sqrt{1 - \varepsilon_0^2}}{\varepsilon_0}\right) p_N(x) \quad (10)$$

ここで、 $P(x)$  はガウス分布を、 $p_N(x)$  はレイリー分布を表しており、それぞれ以下のように定義される。

$$P(x) = N_0(x), \quad p_N(x) = x e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

このとき、 $P(x)$ 、 $p_N(x)$  に対する重み関数をそれぞれ  $w_1(P(x); \varepsilon_0)$ 、 $w_2(p_N(x); \varepsilon_0)$  とし、

$$\begin{cases} w_1(P(x); \varepsilon_0) = \varepsilon_0 P\left(\frac{x}{\varepsilon_0}\right) \\ w_2(p_N(x); \varepsilon_0) = \sqrt{1 - \varepsilon_0^2} Q\left(-x \sqrt{1 - \varepsilon_0^2} / \varepsilon_0\right) p_N(x) \end{cases} \quad (11)$$

と定義すれば、(10) 式は

$$p_G(x; \varepsilon_0) = w_1(P(x); \varepsilon_0) + w_2(p_N(x); \varepsilon_0) \quad (11)$$

と表すことができる。この式は、ガウス過程のピーク値分布が 2 つの重み関数の線形結合によってモデル化できることを示している。

次に、非ガウス性を反映させた  $P(x)$  として (2) 式を採用し、これを  $P'(x)$  とおく。更に  $p_N(x)$  に狭帯域のピーク値評価式<sup>7)</sup>を採用し、これを  $p'_N(x)$  とおくと、それぞれ次のように表される。

$$P'(x) = N_0(x)F_0(x) \quad (12)$$

$$p'_N(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} F_1(x)/F_0(0) \quad (13)$$

ただし、

$$F_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_{n+1}(x)$$

(12)、(13) 式を、重み関数の線形モデルに代入することで、新たなピーク値分布の評価式として以下の式が得られる。

$$p1(x, \varepsilon_1) = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon_1^2} e^{-\frac{1}{2}x^2} F_1(x) Q\left(-x \frac{\sqrt{1 - \varepsilon_1^2}}{\varepsilon_1}\right)}{F_0(0) + \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\varepsilon_1^2} F_0\left(\frac{x}{\varepsilon_1}\right)} \quad (14)$$

## 5. 実験結果

### 5.1 本手法の有効性の確認

信号の発生条件を  $\Delta t = 0.025$  [s]、角周波数の下限値  $\omega_l = 10$  [rad/s]、上限値  $\omega_u = 50$  [rad/s]、展開係数  $A_n$  の値を  $A_3 = 0.15$ 、 $A_4 = 0.05$  とし本手法を用いて不規則信号を発生した。発生した信号の確率密度関数を図 1 に、周波数スペクトルを図 2 に示す。

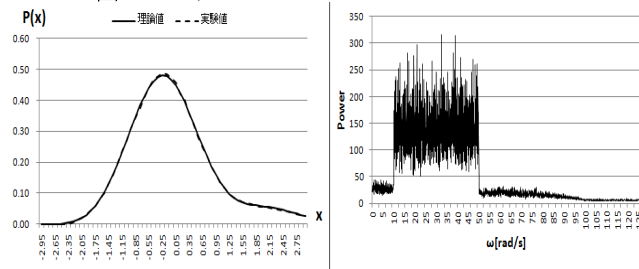


図 1: 確率密度関数

図 2: 周波数スペクトル

図 1 から、実験値と理論値がよく一致していることが確認できる。また、 $\chi^2$  検定を行ったところ、 $X^2 = 83.18 \leq \chi_{97;0.05}^2 =$

120.99 となり、本手法で発生した信号は設定した確率密度関数であることが有意水準  $\alpha = 0.05$  で許容された。また、図 2 から発生条件を満たす周波数スペクトルをもつ信号であることも確認できた。データ数 10 万個で実行したとき、既発表<sup>3)</sup>では 45[sec] 程度であった総計算時間が、本手法を用いることによって、25[sec] 程度に短縮された。

### 5.2 ピーク値分布評価式の検証

本手法を用いて発生させた信号を用いて、ピーク値分布評価式に関する提案法 ((14) 式) と文献 6) によるピーク値分布評価式 ((15) 式、以下、従来法) との  $MSE$  による比較実験を行った。結果を表 1 に、ピーク値分布の推定結果を図 3 に示す。結果より、従来法よりも提案法の方が誤差は少なくなっている。

$$p2(x, \varepsilon_1) = \left\{ (F_1(x) - xF_0(x))Q\left(\frac{x}{\varepsilon_1}\right) + \sqrt{1 - \varepsilon_1^2} e^{-\frac{1}{2}x^2} F_1(x)Q\left(-x \frac{\sqrt{1 - \varepsilon_1^2}}{\varepsilon_1}\right) + \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\varepsilon_1^2} F_0(x) \right\} / F_0(0) \quad (15)$$

次に、周波数帯域の上限値 ( $\omega_u$  [rad/s]) を拡大し、誤差の検討を行った結果を図 4 に示す。図 4 から、いずれの帯域でも提案法の方が誤差が小さいことから、提案法の有効性が確認できる。

表 1: 従来法と本手法の MSE の比較

$\varepsilon_1$	従来法	提案法
0.687	0.013063	0.004067

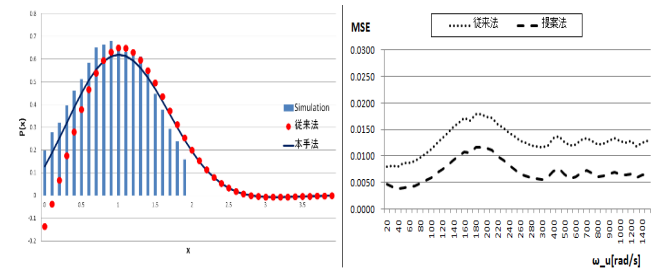


図 3: 従来法と提案法によるピーク値分布

図 4: 周波数帯域に対する誤差

## 6. 結論

本報告では、三角級数モデルとエルミート多項式を用い、更に必要な計算を予めファイルから読み込んでおくことで、任意の確率密度関数と周波数スペクトルをもつ不規則信号を既発表<sup>3)</sup>よりも短時間で発生することが可能となった。また、重み関数に基づく新たな評価式を提案し、本手法で発生させた信号を用いて、ピーク値分布評価式の検証を行った。その結果、従来法よりも良好な結果を得ることができた。最後に、周波数帯域パラメータに対する誤差の検討を行うなど、本手法を用いることにより、ピーク値分布評価式の検証が可能であることが確認できた。

## 参考文献

- 1) J. Hamilton : Appl. Ocean Res, Vol.15, No.6, P.373(1993).
- 2) 星谷勝:確率論手法による振動解析, 鹿島出版, P.51(1974).
- 3) 岸, 南原: 第 70 回情報処理全国大会, 1-263(2008).
- 4) 津田孝夫:モンテカルロ法とシミュレーション, 培風館 P.51(1977).
- 5) Cartwright, D.E. and Longuet-Higgins, M.S.: Proc. Soc., Vol.A237, No.212, P.212(1956).
- 6) 中村, 南原: 情報処理学会論文誌, Vol.49, No.1, P.375(2008).
- 7) 谷田, 南原: 情報処理学会論文誌, Vol.48, No.7, P.2377(2007).