

代用電荷法による数値等角写像とポテンシャル流問題への応用

天野 要[†] 玉井 政行[†] 岡野 大[†]
緒方 秀教[†] 杉原 正顯^{††}

代用電荷法を適用して、非有界な多重連結領域 D から、平行スリット領域、円弧スリット領域、放射スリット領域への等角写像 $w = f(z)$ の簡単で精度の高い数値計算法が得られる。条件 $f(\infty) = \infty$ を課した等角写像によって、障害物の周囲の一樣流、渦流、湧き出し流（または、吸い込み流）の解析が可能である。本論文では、 v を D 内に与えられた有限な点として、条件 $f(v) = \infty$ を課した数値等角写像の方法を提案する。このような等角写像によって、渦対流、湧き出し・吸い込み対流等の解析が可能になる。

Numerical Conformal Mappings by the Charge Simulation Method and Their Application to Potential Flow Problems

KANAME AMANO,[†] MASAYUKI TAMAI,[†] DAI OKANO,[†]
HIDENORI OGATA[†] and MASAOKI SUGIHARA^{††}

In this paper, we propose a method of conformal mapping $w = f(z)$ of an unbounded multiply-connected domain D subject to the condition $f(v) = \infty$, where v is a given finite point in the problem domain. In the method, we reduce the mapping problem to a Dirichlet problem of a pair of conjugate harmonic functions and approximate them, using the charge simulation method, by a linear combination of complex logarithmic functions. The method can be applied to the analysis of a potential flow with a vortex pair past obstacles. A typical example shows the effectiveness of the method. Besides, the idea described here is applicable to some other conformal mappings which are important in potential flow problems.

1. はじめに

等角写像は関数論の基本的な問題の1つであり、物理学や工学への応用も広い^{2),3)}。しかし、多重連結領域の等角写像については、応用上重要な広く知られた問題であるにもかかわらず、その数値計算法は必ずしも十分に研究されていなかった。

天野¹⁾は、ポテンシャル問題の高速解法として知られている代用電荷法を適用して、非有界な多重連結領域 D から、平行スリット領域、円弧スリット領域、放射スリット領域への等角写像 $w = f(z)$ の簡単で精度の高い数値計算法を提案した。具体的には、条件 $f(\infty) = \infty$ を課して、これらの等角写像の問題を一

対の共役な調和関数 $g(z)$, $h(z)$ を求める問題に帰着し、 $g(z) + ih(z)$ を複素対数関数の1次結合で近似した。これらの等角写像によって、障害物の周囲の一樣流、渦流、湧き出し流（吸い込み流）の解析が可能である。

代用電荷法を適用した数値等角写像の利点は表現が簡潔で精度の高い近似写像関数が得られることである。たとえば、近似写像関数が解析的に微分可能であることを利用して、ポテンシャル流中の障害物の周囲にできる淀み点の位置を簡単に計算することができる⁵⁾。また、近似写像関数を Blasius の公式に適用して、ポテンシャル流中の物体に働く力を簡単かつ高精度に計算することができる⁴⁾。

本論文では、 v を D 内に与えられた有限な点として、条件 $f(v) = \infty$ を課した数値等角写像の方法を提案する。具体的には、非有界な多重連結領域 D から、円弧スリット領域への数値等角写像の方法を構成し、その有効性を数値実験的に検証する。また、これを障害物の周囲の渦対流（強さの等しい正負の向き

[†] 愛媛大学工学部情報工学科

Department of Computer Science, Faculty of Engineering, Ehime University

^{††} 名古屋大学大学院工学研究科計算理工学専攻

Department of Computational Science and Engineering, Graduate School of Engineering, Nagoya University

渦対による流れ)に適用する.

2. 円弧スリット領域への数値等角写像の方法

2.1 写像定理

$z (= x+iy)$ 平面上の Jordan 閉曲線 C_1, C_2, \dots, C_n (それぞれの囲む閉領域は互いに交わらないとする)の外側の無限遠点を含む非有界な n 重連結領域 D から, w 平面上の円弧スリット領域への等角写像 $w = f(z)$ を考える(図1). 領域 D 内の任意の2点(正規化点と呼ぶ)を u, v (ここでは有限な点を考える)として, この等角写像は $f(u) = 0, f(v) = \infty, v$ における留数 $\text{Res}_{z=v} f(z) = 1$ という条件(正規化条件と呼ぶ)の下に一意に定まる. 正規化点 v における条件は $z = v$ のまわりの Laurent 級数が

$$f(z) = \frac{1}{z-v} + a_0 + a_1(z-v) + a_2(z-v)^2 + \dots \quad (1)$$

となることを意味する.

写像の結果, 曲線 C_1, C_2, \dots, C_n はそれぞれ原点を中心とする半径 r_1, r_2, \dots, r_n なる円弧スリット S_1, S_2, \dots, S_n に移るとする. スリットの位置と長さは正規化条件によって写像関数とともに定まる.

座標系の原点を $u = 0$ として(一般性を失わない), 問題の等角写像の写像関数を

$$f(z) = \frac{z}{v(z-v)} \exp(g(z) + ih(z)) \quad (2)$$

と表現する. ここに, $g(z), h(z)$ ($g(x, y), h(x, y)$ をこのように略記する)は D で共役な調和関数で, 正規化条件

$$\text{Res}_{z=v} f(z) = \lim_{z \rightarrow v} (z-v)f(z) = 1,$$

すなわち

$$g(v) + ih(v) = 0 \quad (3)$$

と, 境界条件 $|f(z)| = r_m$ ($z \in C_m$), すなわち

$$\log \left| \frac{z}{v(z-v)} \right| + g(z) = \log r_m \quad (m = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

を満たさなければならない. 写像関数(2)の形から, 正規化条件 $f(0) = 0, f(v) = \infty$ は自然に満たされる.

写像関数の存在と一意性から, 問題はこのような一対の共役な調和関数 $g(z), h(z)$ を求めることに帰着する.

2.2 代用電荷法の適用

代用電荷法を適用して, 写像関数(2)の指数部分を複素対数関数の1次結合で

$$g(z) + ih(z) \simeq G(z) + iH(z)$$

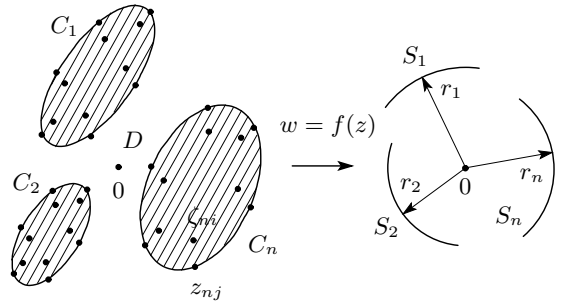


図1 代用電荷法による円弧スリット領域への数値等角写像
Fig.1 Numerical conformal mapping onto the circular slit domain by the charge simulation method.

$$= Q_0 + \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log(z - \zeta_{li}) \quad (5)$$

と近似する. ここに, Q_0 は未知の複素定数, Q_{li} は未知の実係数(電荷と呼ぶ)で, 対数関数の極 ζ_{li} (電荷点と呼ぶ)は領域 D の外部すなわち閉曲線 C_l の内側に N_l 個ずつ配置する. 近似関数(5)に対して, 次の3条件を課す.

(i) 1価性条件: 複素関数(5)は一般に無限多価であり, これが D で1価であるためには

$$\int_{C_l} dH(z) = \int_{C_l} d \sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^{N_m} Q_{mi} \arg(z - \zeta_{mi}) = 2\pi \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} = 0,$$

すなわち

$$\sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

でなければならない.

(ii) 正規化条件: 式(3)から

$$G(v) + iH(v) = Q_0 + \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log(v - \zeta_{li}) = 0,$$

したがって

$$Q_0 = - \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log(v - \zeta_{li}) \quad (7)$$

でなければならない. これを式(5)に代入して Q_0 を消去し,

$$G(z) + iH(z) = \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log \frac{z - \zeta_{li}}{v - \zeta_{li}} \quad (8)$$

となる。

(iii) 拘束条件：各閉曲線 C_m ($m = 1, 2, \dots, n$) 上に電荷と同数の N_m 個の拘束点 z_{mj} を配置し、これらの点で選点的に境界条件 (4) を課して

$$\log \left| \frac{z_{mj}}{v(z_{mj} - v)} \right| + G(z_{mj}) = \log R_m,$$

すなわち

$$\sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log \left| \frac{z_{mj} - \zeta_{li}}{v - \zeta_{li}} \right| - \log R_m = -\log \left| \frac{z_{mj}}{v(z_{mj} - v)} \right| \quad (9)$$

($z_{mj} \in C_m; j = 1, 2, \dots, N_m; m = 1, 2, \dots, n$)

を得る。 R_m は r_m を近似する未知の定数である。

式 (6), (9) は電荷 $Q_{11}, Q_{12}, \dots, Q_{nN_n}$ とスリットの半径の対数 $\log R_1, \log R_2, \dots, \log R_n$ に関する $N_1 + N_2 + \dots + N_n + n$ 元連立 1 次方程式を構成する。これを解いて問題の等角写像の近似写像関数を構成することができる。

2.3 連続スキームの構成

複素対数関数の数値計算に主値を用いると、式 (8) の $\log((z - \zeta_{li})/(v - \zeta_{li}))$ は v から見た ζ_{li} の背後の半直線 $\{\zeta_{li} + t \exp(i \arg(\zeta_{li} - v)) \mid t \geq 0\}$ 上に 2π の不連続を持つ。我々はこのような不連続の問題を生じない近似写像関数を構成したい。

ここでは、簡単のために閉曲線 C_1, C_2, \dots, C_n はそれぞれの内側の 1 点 $\zeta_{10}, \zeta_{20}, \dots, \zeta_{n0}$ に対して星形であると仮定する。そして、式 (6) を用いて、式 (7) を

$$\begin{aligned} Q_0 &= -\sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log(v - \zeta_{li}) \\ &\quad + \sum_{l=1}^n \left(\sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \right) \log(v - \zeta_{l0}) \\ &= -\sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log \frac{v - \zeta_{li}}{v - \zeta_{l0}}, \end{aligned} \quad (10)$$

同様に式 (8) を

$$\begin{aligned} G(z) + iH(z) &= \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} (\log(z - \zeta_{li}) - \log(v - \zeta_{li})) \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log \frac{z - \zeta_{li}}{z - \zeta_{l0}} + Q_0 \end{aligned} \quad (11)$$

と変形する。式 (11) の $\log((z - \zeta_{li})/(z - \zeta_{l0}))$ の不連続は線分 $[\zeta_{li}, \zeta_{l0}]$ 上に現れる。こうして問題の領域 D で 1 価連続な近似写像関数を構成することができ

る。

アルゴリズム：上記の仮定の下に、問題の等角写像の近似写像関数を

$$F(z) = \frac{z}{v(z - v)} \exp(G(z) + iH(z)), \quad (12)$$

$$G(z) + iH(z) = Q_0 + \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log \frac{z - \zeta_{li}}{z - \zeta_{l0}}, \quad (13)$$

$$Q_0 = -\sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log \frac{v - \zeta_{li}}{v - \zeta_{l0}} \quad (14)$$

と表現する。電荷 $Q_{11}, Q_{12}, \dots, Q_{nN_n}$ とスリットの半径の対数 $\log R_1, \log R_2, \dots, \log R_n$ は $N_1 + N_2 + \dots + N_n + n$ 元連立 1 次方程式

$$\sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log \left| \frac{z_{mj} - \zeta_{li}}{v - \zeta_{li}} \right| - \log R_m &= -\log \left| \frac{z_{mj}}{v(z_{mj} - v)} \right| \end{aligned} \quad (16)$$

($z_{mj} \in C_m; j = 1, 2, \dots, N_m; m = 1, 2, \dots, n$)

を解いて求まる。

なお、 $F(\infty) = (1/v) \exp Q_0$ である。

3. 数 値 例

半径の異なる 3 つの円

$$\begin{aligned} |z - \zeta_{l0}| &= \rho_l, \quad \rho_1 = 1.5, \rho_2 = 1.0, \rho_3 = 0.5, \\ \zeta_{l0} &= 2 \exp \frac{(2(l-1) + 1)\pi i}{3} \quad (l = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

の外部領域を D とし、正規化点を $u = 0$ と $v = 4$ にとる。また、拘束点と電荷点を

$$\begin{aligned} z_{lj} &= \zeta_{l0} + \rho_l \exp \frac{2(j-1)\pi i}{N}, \\ \zeta_{lj} &= \zeta_{l0} + q\rho_l \exp \frac{2(j-1)\pi i}{N} \end{aligned} \quad (j = 1, 2, \dots, N; l = 1, 2, 3)$$

と配置する。ここに、 $0 < q < 1$ は電荷配置のパラメータである。厳密解は知られていないので、誤差の指標として

$$E_{MI} = \max_{1 \leq j \leq N} \left| \frac{|F(z_{lj+1/2})|}{R_l} - 1 \right|,$$

一般の場合にも、簡単な変数変換¹⁾で連続な近似写像関数を構成することが可能である。

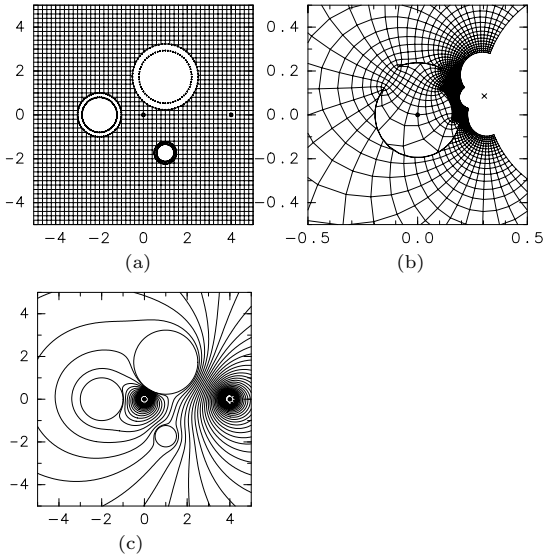


図 2 円弧スリット領域への数値等角写像と渦対流

Fig.2 Numerical conformal mapping $w = F(z)$ onto the circular slit domain and contour lines of $-\log |F(z)|$, i.e., streamlines of a vortex pair flow.

表 1 誤差評価

Table 1 Error estimation ($cond = 1.2 \times 10^5$, $N = 64$, $q = 0.8$).

	E_{MI}	E_{RI}	R_l
C_1	3.8×10^{-5}	9.8×10^{-9}	0.194527861
C_2	6.8×10^{-8}	1.9×10^{-8}	0.159889298
C_3	1.4×10^{-8}	1.5×10^{-8}	0.237455547

$$E_{RI} = \left| \frac{R_l}{R_l^{(2N)}} - 1 \right| \quad (l = 1, 2, 3)$$

を用いる．ここに、 $z_{l,j+1/2}$ は C_l 上の拘束点 z_{lj} と z_{lj+1} の中間点であり、 $R_l^{(2N)}$ は電荷数を N から $2N$ に倍増した場合の R_l の計算値である．

図 2、表 1 に計算結果を示す．スリットの半径 R_l は $R_l - R_l^{(2N)}$ に零以外の数字が現れる桁までの値であり、 $cond$ は連立 1 次方程式の L_1 条件数である．

図 2(a) と (b) は、 z 平面上の実軸と虚軸に平行な直線群によって、問題の領域 D から円弧スリット領域への数値等角写像 $w = F(z)$ の様子を示したものである．半径最大の円 C_1 が原点左下のスリットに、 C_2 が原点右のスリットに、 C_3 が原点上のスリットに移っている．図 (b) の空白部分は (a) の正方形領域の外部の像で、印 \times は $F(\infty) \simeq 0.30 + 0.086i$ の位置を示す．

図 2(c) は閉曲線 C_1, C_2, C_3 を輪郭線とする円形の障害物の周囲の渦対流の流線である．強さの等しい正の向きの渦が原点 $u = 0$ に、負の向きの渦

が点 $v = 4$ に存在している．この流れの複素ポテンシャルは $-\log F(z)$ で与えられる．流線はその虚部 $-\log |F(z)|$ の等高線である．

4. おわりに

本論文では、 v を与えられた有限な点として、条件 $f(v) = \infty$ を課した非有界な多重連結領域の数値等角写像について、方法の原理と応用の一例を記した．同じ条件を課して、放射スリット領域への数値等角写像の方法を構成し、湧き出し・吸い込み対流（強さの等しい湧き出しと吸い込みの対による流れ）に適用することが可能である．

渦対流、湧き出し・吸い込み対流は、条件 $f(\infty) = \infty$ を課した等角写像を用いて、複素ポテンシャルの重ね合わせで実現することもできる¹⁾．しかし、一樣流、渦流、湧き出し流（吸い込み流）に加えて、渦対流、湧き出し・吸い込み対流の直接的な計算が可能になることの意義は大きい．同様な問題は、流体力学だけでなく、電磁気学、電気工学等のポテンシャル問題全般に広く現れるからである．また、平行スリット領域への数値等角写像の方法を構成すれば、2重湧き出し流（湧き出し・吸い込み対流の極限として得られる）の解析も可能になる²⁾．

謝辞 本研究は日本学術振興会科学研究費補助金（基盤研究（B）（2）、課題番号 15340033）の助成を受けている．

参考文献

- 1) 天野 要, 岡野 大, 緒方秀教, 下平博巳, 杉原正顯: 代用電荷法による非有界な多重連結領域の統一的な数値等角写像の方法, 情報処理学会論文誌, Vol.42, No.3, pp.385-395 (2001).
- 2) 今井 功: 複素解析と流体力学, 日本評論社, 東京 (1989).
- 3) Nehari, Z.: *Conformal Mapping*, McGraw-Hill, New York (1952); Dover, New York (1975).
- 4) Ogata, H., Okano, D. and Amano, K.: Computations of the forces on obstacles in two-dimensional potential flows by the charge simulation method, *Information*, Vol.5, No.3, pp.307-318 (2002).
- 5) Okano, D., Ogata, H. and Amano, K.: Stagnation point analysis by the numerical conformal mapping using the charge simulation method, *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol.50, pp.303-309 (2001).

(平成 15 年 9 月 3 日受付)

(平成 16 年 3 月 5 日採録)